

Lösungshinweise/-vorschläge zum Übungsblatt 14p: Software-Entwicklung 1 (WS 2017/18)

Die Hinweise und Vorschläge in diesem Dokument sollen der Lösungsfindung dienen und erheben demnach weder Anspruch auf Vollständigkeit noch Korrektheit. Sollten Sie Fehler finden, würden wir uns freuen, wenn Sie uns diese mitteilen. (Kontaktinformationen finden Sie auf unserer Webpräsenz.)

Aufgabe 1 Präsenzaufgabe zu Lambdas

- a) Verwenden Sie die formale Definition für freie Variablen und berechnen Sie damit die Menge der freien Variablen in folgendem Lambda-Term. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte an.

$(\lambda x \rightarrow \lambda f \rightarrow f a x) x$

$$\begin{aligned} & FV((\lambda x \rightarrow \lambda f \rightarrow f a x) x) \\ &= FV(\lambda x \rightarrow \lambda f \rightarrow f a x) \cup FV(x) \\ &= (FV(\lambda f \rightarrow f a x) \setminus \{x\}) \cup \{x\} \\ &= (FV(f a x) \setminus \{f\} \setminus \{x\}) \cup \{x\} \\ &= ((FV(f a) \cup FV(x)) \setminus \{f\} \setminus \{x\}) \cup \{x\} \\ &= ((FV(f) \cup FV(a) \cup \{x\}) \setminus \{f\} \setminus \{x\}) \cup \{x\} \\ &= ((\{f\} \cup \{a\} \cup \{x\}) \setminus \{f\} \setminus \{x\}) \cup \{x\} \\ &= \{a, x\} \end{aligned}$$

Alternative Schreibweise:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{FV((\lambda x \rightarrow \lambda f \rightarrow f a x) x)} & = \{a, x\} \\
& \underbrace{FV(\lambda x \rightarrow \lambda f \rightarrow f a x)} \cup \underbrace{FV(x)} \\
& \underbrace{FV(\lambda f \rightarrow f a x)} \setminus \{x\} \quad \{x\} \\
& \underbrace{FV(f a x)} \setminus \{f\} \\
& \underbrace{FV(f a)} \cup \underbrace{FV(x)} \\
& \underbrace{FV(f)} \cup \underbrace{FV(a)} \quad \{x\} \\
& \{f\} \quad \{a\}
\end{aligned}$$

b) Sind die folgenden Substitutionen erlaubt? Falls nicht, begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, berechnen Sie für die Substitution das Ergebnis mit Hilfe der formalen Definition. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte an.

1. $(h x (\lambda x \rightarrow f x)) [42/x]$

$$\begin{aligned}
& (h x (\lambda x \rightarrow f x)) [42/x] \\
& = (h x) [42/x] (\lambda x \rightarrow f x) [42/x] \\
& = h [42/x] x [42/x] (\lambda x \rightarrow f x) \\
& = h 42 (\lambda x \rightarrow f x)
\end{aligned}$$

2. $(h x (\lambda x \rightarrow f x)) [g x/f]$

Die Substitution ist nicht erlaubt:

$$\begin{aligned}
& (h x (\lambda x \rightarrow f x)) [g x/f] \\
& = (h x) [g x/f] (\lambda x \rightarrow f x) [g x/f] \\
& = h [g x/f] x [g x/f] \quad \underbrace{(\lambda x \rightarrow f x) [g x/f]} \\
& \qquad \qquad \qquad \text{nicht erlaubt, weil } f \neq x \text{ und } x \in FV(g x)
\end{aligned}$$

c) Bringen Sie die folgenden Lambda-Terme in eine β -Normalform. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte an (die erforderlichen Substitution sollen dabei für β -Konversionen explizit angegeben werden, dürfen dann aber in einem Schritt ausgewertet werden; α -Konversionen dürfen in einem Schritt durchgeführt werden).

Die Lambda-Terme in dieser Aufgabe enthalten Zahlen und mathematische Operationen, welche mathematisch auszuwerten sind.

1. $(\lambda x \rightarrow x \cdot x) 3$

$$\begin{aligned}
& (\lambda x \rightarrow x \cdot x) 3 \\
& \stackrel{\beta}{=} (x \cdot x)[3/x] \\
& = 3 \cdot 3 \\
& = 9
\end{aligned}$$

2. $(\lambda x y \rightarrow (\lambda x y \rightarrow a y x) y x)$

Hier müssen zuerst gebundene Variablen mit α -Konversionen umbenannt werden, damit die β -Konversionen angewandt werden können. Es wäre hier ausreichend das innere y zu y' zu ändern, aber der Klarheit wegen kann es sinnvoll sein, einfach alle Variablennamen eindeutig zu machen.

$$\begin{aligned}
& (\lambda x y \rightarrow (\lambda x y \rightarrow a y x) y x) \\
& \stackrel{\alpha}{=} (\lambda x y \rightarrow (\lambda x' y' \rightarrow a y' x') y x) \\
& \stackrel{\beta}{=} (\lambda x y \rightarrow (\lambda y' \rightarrow a y' x')[y/x'] x) \\
& = (\lambda x y \rightarrow (\lambda y' \rightarrow a y' y) x) \\
& \stackrel{\beta}{=} (\lambda x y \rightarrow (a y' y)[x/y']) \\
& = (\lambda x y \rightarrow a x y)
\end{aligned}$$