Algorithmen und Datenstrukturen

– Wintersemester 2019 –

Kapitel 08: Hashing

Fachbereich Informatik
TU Kaiserslautern

Dozent: Dr. Patrick Michel

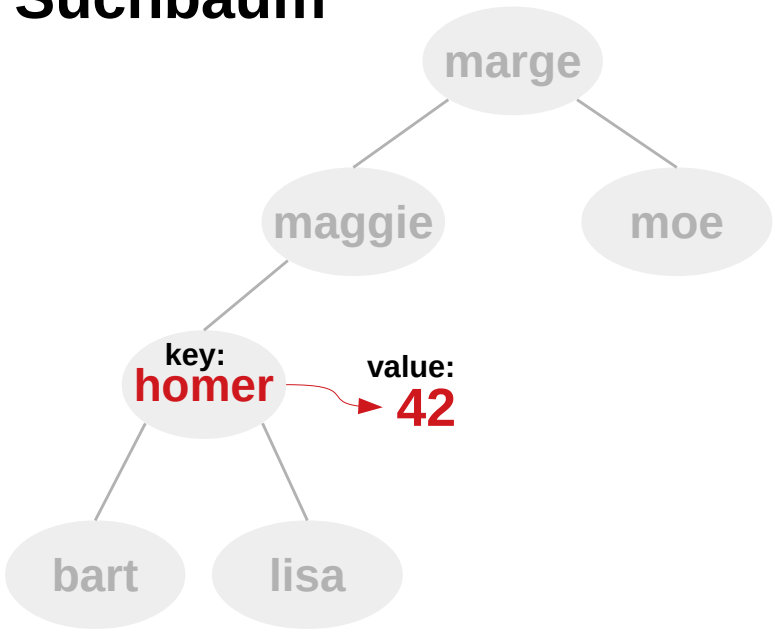
Folien ursprünglich von Prof. Dr. Adrian Ulges (Hochschule RheinMain)

Hashing

- **Ziel**: Realisiere **Mengen** (`sets`) und **Wörterbücher** (`maps`).
- **Bisher**: Suchbäume (siehe JCF: `TreeSet`, `TreeMap`).
- **Im Folgenden**: Eine weitere Standard-Strategie, **Hashing**.
- **Im JCF**: `HashSet`, `HashMap`.

Beispiel: `map.get('homer') = 42`

Suchbaum

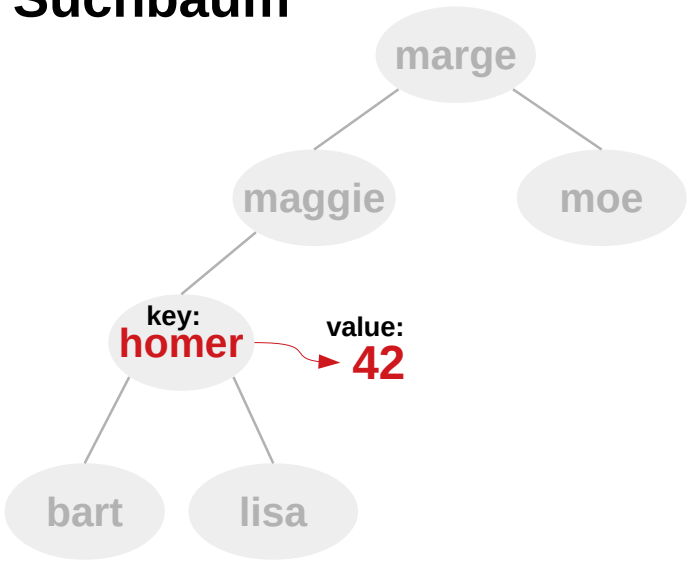


Hashing

key	value
marge	39
bart	42
moe	45
lisa	8
homer	**42**
maggie	1

Hashing

Suchbaum



Hashing

key	value
marge	39
bart	42
moe	45
lisa	8
homer	42
maggie	1

Suchbäume

- basieren auf **Vergleichen**
- Datenstruktur **dynamisch**
- **logarithmische** Operationen *(bei* **ausgeglichenen** *Bäumen)*

Hashing

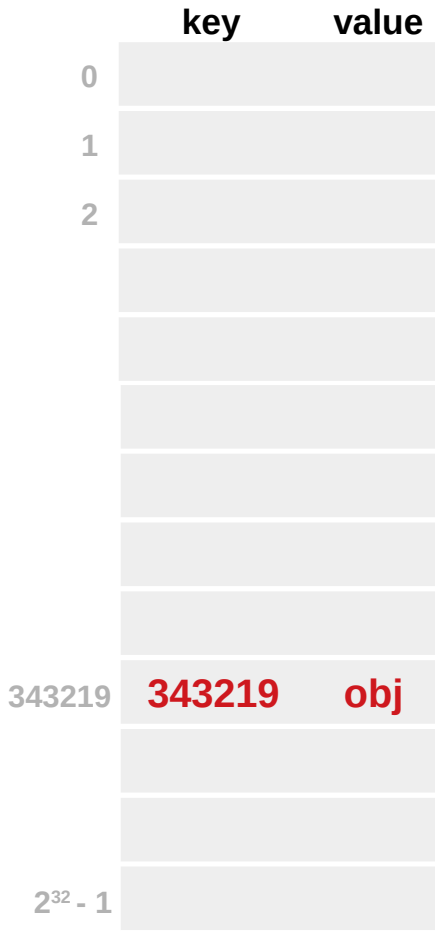
- basiert auf **Hash-Funktion**
- **statische** Datenstruktur *(= Array)*
- **meist konstante** Operationen *(können* **entarten***!)*

Hashing: Grundprinzip

- Beim Hashing bestimmt der **Schlüssel** (`key`) die **Position** innerhalb eines Arrays.
- Das Array – die sogenannte **Hash-Tabelle** – hat N Plätze $(0, 1, 2, ..., N-1)$.

Beispiel: `int`-Schlüssel

- **Beispiel**: Matrikelnummern *(z.B. 343219)*
- N = Größe des Schlüssel-**Wertebereichs**
- **Hier**: $N = 2^{32}$ (ca. 4.3 Mrd).



Vorteile / Nachteile?

- ☺ **Zugriff** ist **günstig** (O(1), Position im Speicher einfach berechenbar).
- ☺ keine Vergleiche notwendig.
- ☹☹ **hoher Speicherbedarf**.

Hashing: Grundprinzip

Wie realisieren wir eine **kleinere Hash-Tabelle**?

Beispiel: `int`-Schlüssel

- Wir wählen ein **kleineres N**.
- Wir bestimmen die **Position** eines **Schlüssels k** im Array als

$$h(k) = k \,\%\, \mathbf{N}$$

Beispiel (rechts)

- Die Tabelle besitze $N = 1000$ Einträge.
- Schlüssel $k = 343\underline{219}$.
- $h(k) = k \,\%\, 1000 = 219$.

Outline

1. Hash-Funktionen

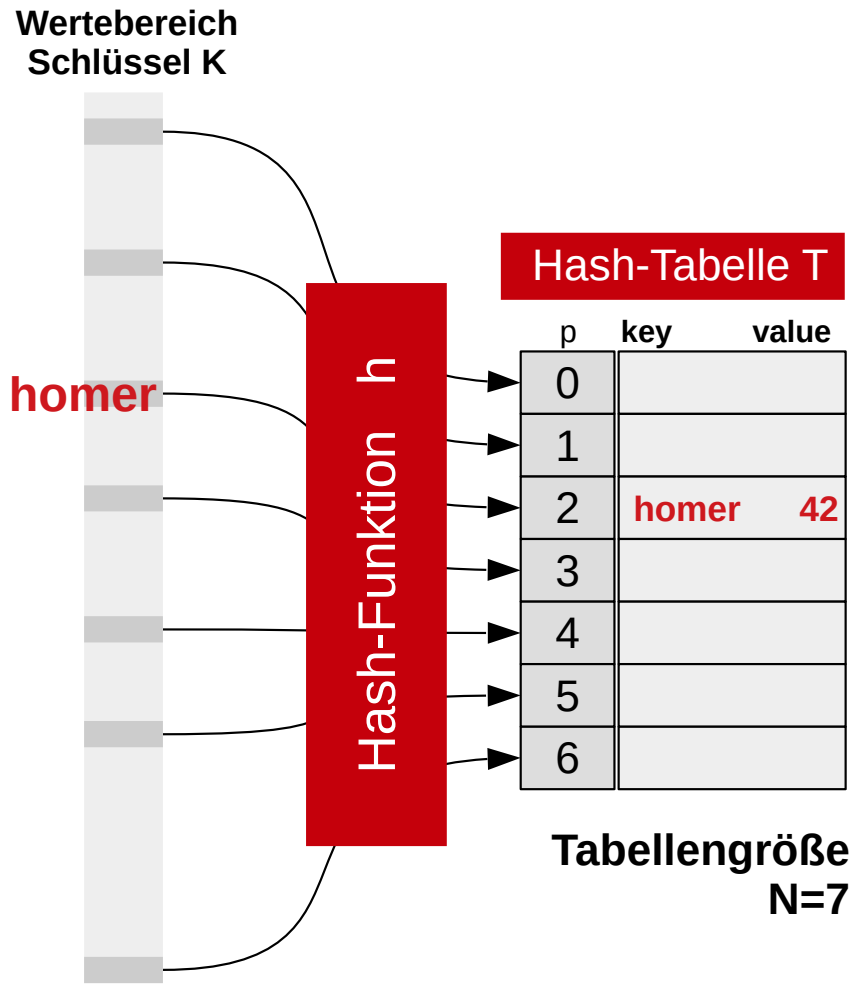
2. Kollisionsbehandlung 1: Sondieren

3. Kollisionsbehandlung 2: Verkettung

Hashing: Grundprinzip

Schlüssel = beliebige Objekte!

- Im allgemeinen Fall sind Schlüssel keine `int`-Werte, sondern **beliebige Objekte**.
- Auch diese müssen wir auf Positionen in der Hash-Tabelle abbilden.
- **Achtung**: Der Schlüssel-Wertebereich kann **unendlich groß** sein!
- **Beispiel**: Die Menge aller Strings.



Ansatz: Schlüsseltransformation

- Eine **Hash-Funktion h** berechnet aus einem Schlüssel k eine **Position** $h(k) \in \{0, 1, ..., N-1\}$ in der Hash-Tabelle.

Definition: Hash-Funktion

Definition (Hash-Funktion)

Es sei K eine Menge (bzw. ein Typ) von Schlüsseln und $N \in \mathbb{N}^+$ die Größe einer Hash-Tabelle. Dann ordnet eine **Hash-Funktion**

$$h: \quad K \quad \rightarrow \quad \{0, 1, ..., N-1\}$$

einem Schlüssel k einen Wert $h(k)$ zu.

Anmerkungen

- Der **Schlüssel-Typ K** kann beliebig sein: Strings, Zahlen, Objekte beliebiger Klassen ...
- Weil die Hash-Funktion bei jedem Einfügen/Suchen/Löschen verwendet wird, sollte sie **schnell berechenbar** sein ($O(1)$).
- Das Ergebnis $h(k)$ bezeichnen wir auch als **Hash-Wert** von k.

Hashing: Naive Implementierung

- Typen K (key) und V (value) für Schlüssel und Wert.
- Ein `Entry` steht für ein **Schlüssel-Wert-Paar**.
- Die Hash-Tabelle ist ein **Array** solcher Schlüssel-Wert-Paare.
- **Einfügen, Löschen, Suchen** sind ähnlich:
  - Hash-Code berechnen
  - Feld in Tabelle bearbeiten.

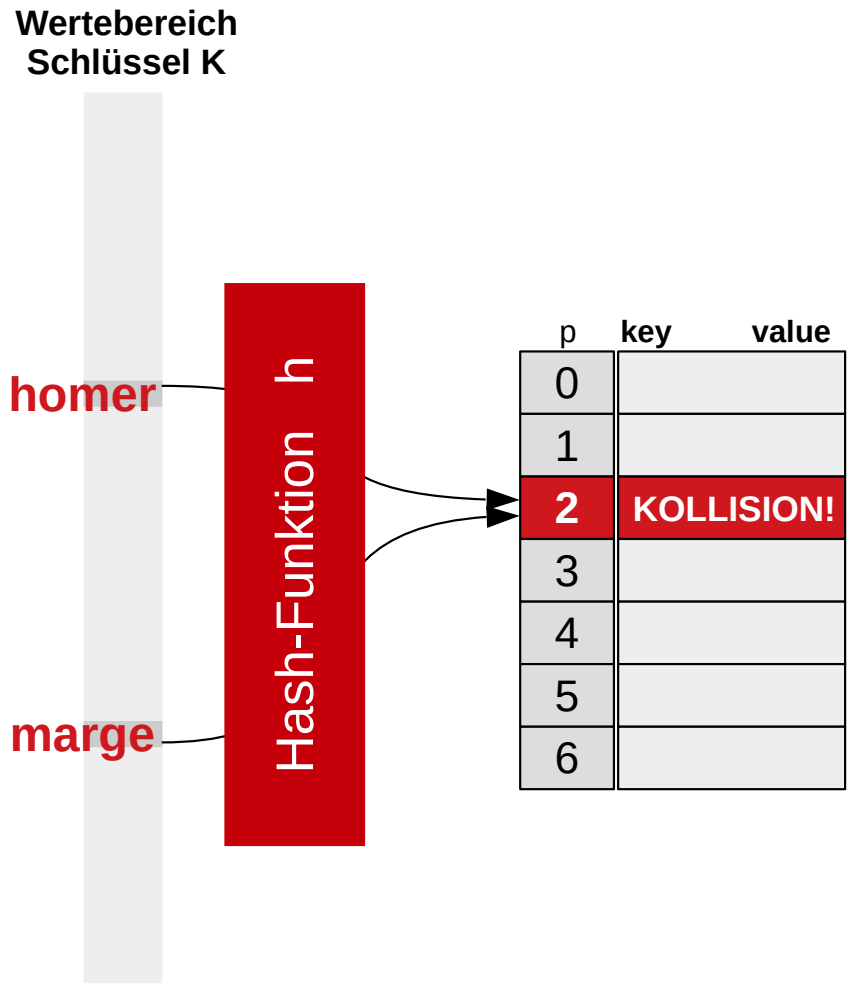
```
class HashMapNaive<K,V> {

  private class Entry {
    K key;
    V value;
  }

  Entry[] table;

  public HashMapNaive(int N) {
    table = (Entry[]) new Object[N];
  }

  private int hashcode(K key) {
      ...
  }

  public V get(K key) {
      return table[hashcode(key)].value;
  }

  public void insert(K key, V value) {
      table[hashcode(key)] = new Entry(key,
                                       value);
  }

  public void delete(K key) {
      table[hashcode(key)] = null;
  }

}
```

Problem: Kollisionen

- Meist gilt **N** << #**K**
  (die Tabelle ist deutlich kleiner als die Schlüsselmenge).
- Gemäß dem **Taubenschlag-prinzip** folgt:

  Mindestens **zwei verschiedene Schlüssel** müssen auf **identische Hash-Werte** (Positionen) abgebildet werden.

- Wir bezeichnen sollte Konflikte als **Kollisionen**.
- Hash-Funktionen sind also **nicht injektiv**!

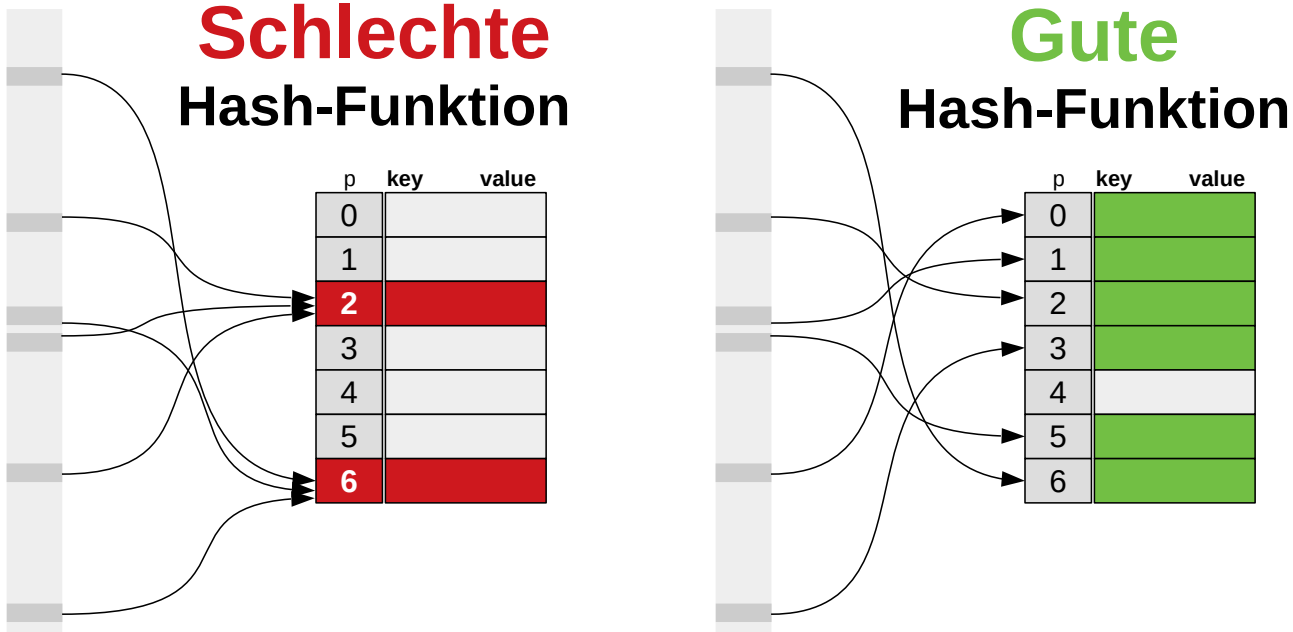


Strategien gegen Kollisionen

1. **Reduziere** die Zahl der Kollisionen mit einer **“guten” Hash-Funktion**.
2. **Behandle** die verbleibenden Kollisionen.
   Zwei Strategien *(später)*: Verkettung und Sondieren.

“Gute” Hash-Funktionen...

... besitzen eine **hohe Streuung**: Schlüssel werden **gleichmäßig** auf Hash-Werte verteilt, Vermeidung von Kollisionen.



Hash-Funktionen für Strings: Beispiele

Wir betrachten ein paar **Beispiel-Hash-Funktionen**:

1. `int`-Schlüssel

$h(k) = k/N$

2. `int`-Schlüssel, Version 2

$h(k) = k \ \% \ N$

Hash-Funktionen

Die Wahl von **N ist entscheidend** für das Streuverhalten!

Schlechte Werte für N ...

- ... sind z.B. **Zweierpotenzen** *(siehe oben)*.
- Für $N = 2^i$ werden nur die letzten i Bits des Hash-Codes verwendet, restliche Bits werden ignoriert.

Gute Werte für N ...

- ... sind z.B. **Primzahlen**.
- Auch bei gehäuften Schlüsseln / Teilbitfolgen gute Streuung.

Hash-Funktionen für Strings: Beispiele

3. String-Schlüssel

- Wir hashen die Studis der HSRM, mit dem **Nachnamen** als Schlüssel.
- Es sei $k = k_1, k_2, ..., k_m$ ein Schlüssel.
- Wir interpretieren die **Buchstaben** k_i als Zahlen *(ASCII-Codes, Unicodes)*.
- Wir nutzen die ersten drei Buchstaben: $h(k) = (k_1 + k_2 + k_3) \% N$

Character	Hex	Character	Hex
A	41	N	4E
B	42	O	4F
C	43	P	50
D	44	Q	51
E	45	R	52
F	46	S	53
G	47	T	54
H	48	U	55
I	49	V	56
J	4A	W	57
K	4B	X	58
L	4C	Y	59
M	4D	Z	5A

Hash-Funktionen für Strings: Beispiele

Character	Hex	Character	Hex
A	41	N	4E
B	42	O	4F
C	43	P	50
D	44	Q	51
E	45	R	52
F	46	S	53
G	47	T	54
H	48	U	55
I	49	V	56
J	4A	W	57
K	4B	X	58
L	4C	Y	59
M	4D	Z	5A

Hash-Funktionen für Strings

Nicht-numerische Attribute müssen wir für die Hash-Funktion auf Zahlen **abbilden**. Beispielhaft tun wir dies für **Strings**:

Definition (Hash-Funktion für Strings (Version 1))

Gegeben sei ein String $k = k_1, k_2, ..., k_n$. *Wir interpretieren die Buchstaben* k_i *(bzw. ihren ASCII-Code/Unicode) als* **Ziffern**. *Als Hash-Wert ergibt sich:*

$$h(k) = \left(k_1 \cdot B^{n-1} + k_2 \cdot B^{n-2} + ... + k_{n-1} \cdot B^1 + k_n \cdot B^0\right) \% N,$$

gegeben eine **Basis** $B \in \mathbb{N}^+$ *mit* $B > 1$.

Beispiel

Basis B=10, String k="ADS".

$$h(\text{“}ADS\text{''}) = \left(A \cdot 100 \; + \; D \cdot 10 \; + \; S \cdot 1\right) \% N$$

Hash-Funktionen für Strings (cont'd)

Anmerkungen

- Der Hash-Wert hängt (bei gutem N) von **allen** **Buchstaben** des Strings ab. ☺
- Häufige Wahl für Basis: $B = 31$ *(vgl. Javas String.hashcode())*.

Problem

- Bei langen Strings sind die einzelnen Summanden **sehr groß**. Es kommt zu **Überläufen**.
- **Beispiel** *(37 Buchstaben, Basis 10)*:

$$
\begin{aligned}
&h(\text{“With power comes great responsibility”}) \\
&= \mathbf{W} \cdot \mathbf{10^{36}} + i \cdot 10^{35} + t \cdot 10^{34} \ldots \\
&= \mathbf{57000000000000000000000000000000000000} + \ldots
\end{aligned}
$$

Hash-Funktionen für Strings (cont'd)

Um diese Überläufe zu vermeiden, nutzen wir das **Horner-Schema**:

$$k_1 \cdot B^{n-1} \; + \; k_2 \cdot B^{n-2} \; + \; \ldots \; + \; k_{n-1} \cdot B^1 \; + \; k_n \cdot B^0$$

Trick: Nach jeder berechneten Stelle führen wir eine %-Operation durch → Es entsteht **kein Überlauf**.

Hash-Funktionen für Strings (cont'd)

Definition (Hash-Funktion für Strings (Version 2))

Gegeben sei erneut ein String $k = k_1, k_2, ..., k_n$ *und eine Basis* B*. Wir berechnen denselben Hash-Wert wie in Version 1, vermeiden aber* **Überläufe** *mit dem Horner-Schema. Wir rechnen:*

```
// Horner-Schema
h ← 0
for i = 1...n:
  h ← ( h * B + s_i ) % N // Überlauf vermeiden
return h
```

Beispiel

$B = 5,\ N = 7,$ k=”ADS” ($\rightarrow$ ASCII: 65,68,83)

p	key	value
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Outline

1. Hash-Funktionen

2. Kollisionsbehandlung 1: Sondieren

3. Kollisionsbehandlung 2: Verkettung

Sondieren

Auch bei guten Hash-Funktionen treten **immer noch Kollisionen** auf *(Taubenschlagprinzip)*, und wir müssen sie behandeln.

Lösung 1: Sondieren

Suche *(in festgelegten Schritten)* nach freiem Platz, so lange bis...

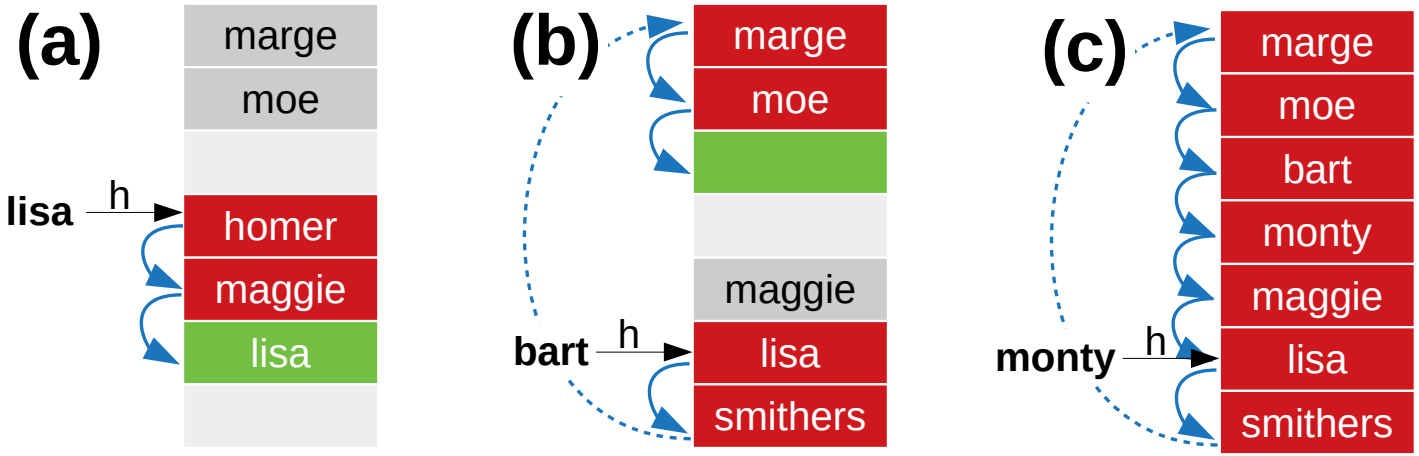
(a) **Schlüssel gefunden**, oder

(b) **freier Platz** gefunden, oder

(c) wieder am **Ausgangspunkt** *(Tabelle voll)*.

Einfachste Variante: Lineares Sondieren

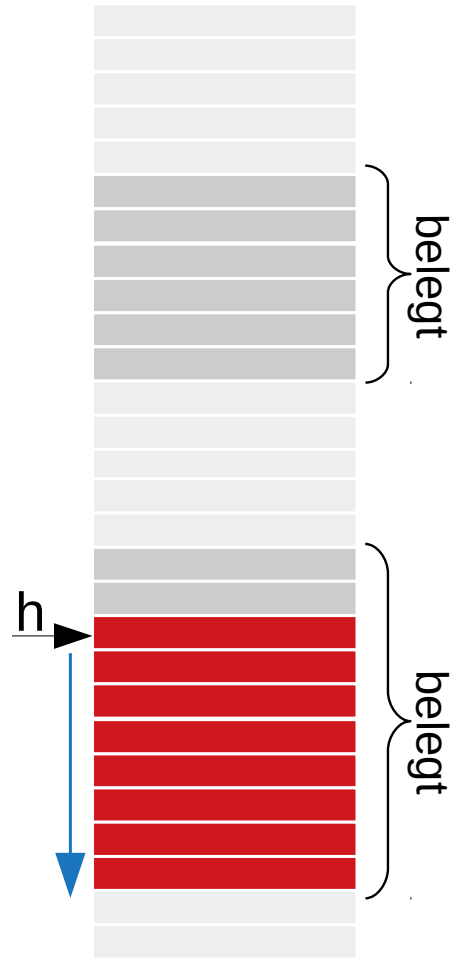
Gehe immer **einen Schritt** weiter. Am **Tabellenende**: Umbruch.



Sondieren: Generell

Problem: Klumpenbildung

- Bei linearer Sondierung **häufen** sich Werte oft in **bestimmten Bereichen** der Tabelle.
- Das widerspricht dem Prinzip der **Gleichverteilung**.
- Such- und Einfüge-Operationen werden **teuer** *(viele Sondierungsschritte)!*



Genereller Ansatz: Sondierungsfunktion

Wir definieren eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \{0, 1, ..., N-1\}$.

- Für jeden Sondierungsschritt m gibt $g(m)$ an, **welche Stelle** der Hash-Tabelle geprüft wird.
- $g(0)$ entspricht dem **Hash-Wert** $h(k)$.
- **Lineares Sondieren**: $g(m) = (h(k) + m) \,\%\, N$.

Weitere Sondierungsfunktionen

Linear, größere Schritte

- $g(m) = (h(k) + \mathbf{c \cdot m}) \,\%\, N$.
- Gehe nicht um einen, sondern um c Schritte weiter.

Quadratisches Sondieren

- $g(m) = (h(k) + \mathbf{m^2}) \,\%\, N$.
- Quadratische Schritte ($+1$, $+4$, $+9$, $+16$, ...)
- Sprünge werden mit jedem Schritt größer, weniger "Klumpen".

Hashing mit Sondieren: Beispiel

- Tabellengröße $N = 11$, Hash-Funktion: $h(k) = k \,\%\, 11$
- Füge ein: $3, 0, 22, 11, 12, 13, 23, 33$
- Suche: $33, 15$. Lösche: 22 (?)

(a) linear

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

(b) quadratisch

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Sondieren: Bewertung

- ☺ kein **zusätzlicher Speicher** nötig, nur die Hash-Tabelle.
- ☺ in der **Praxis**: gute Laufzeiteigenschaften.

- ☹ **Entartung/Klumpenbildung** möglich, schwer abzufangen.
- ☹ empfindlich bei **hohem Füllgrad**.
- ☹ **Löschen** sehr aufwändig
  (oft werden Elemente nur als gelöscht markiert).

Outline

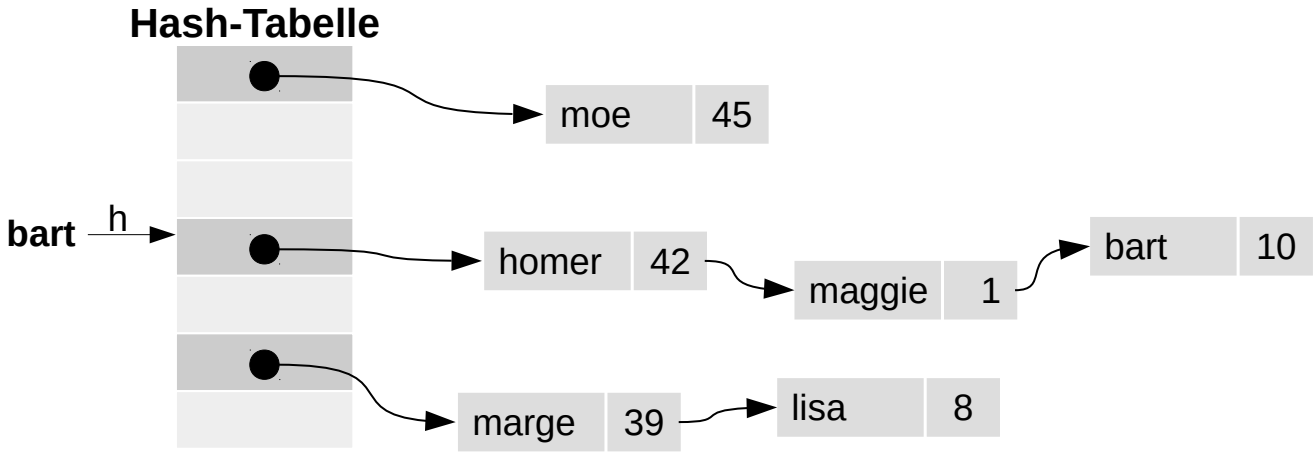
1. Hash-Funktionen

2. Kollisionsbehandlung 1: Sondieren

3. Kollisionsbehandlung 2: Verkettung

Verkettung

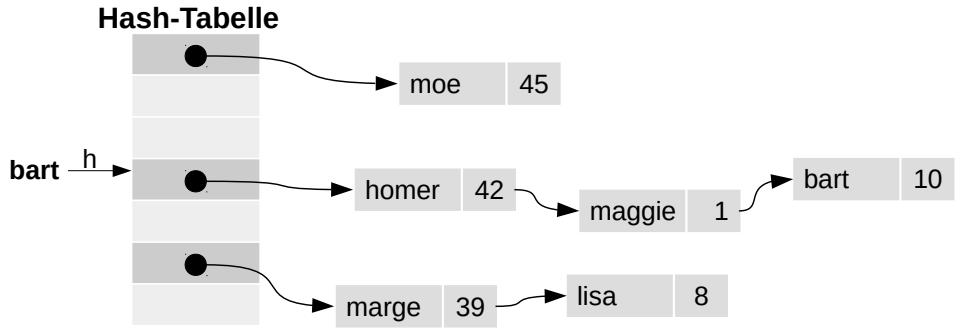
Die zweite Behandlung von Kollisionen lautet **Verkettung**.



Ansatz

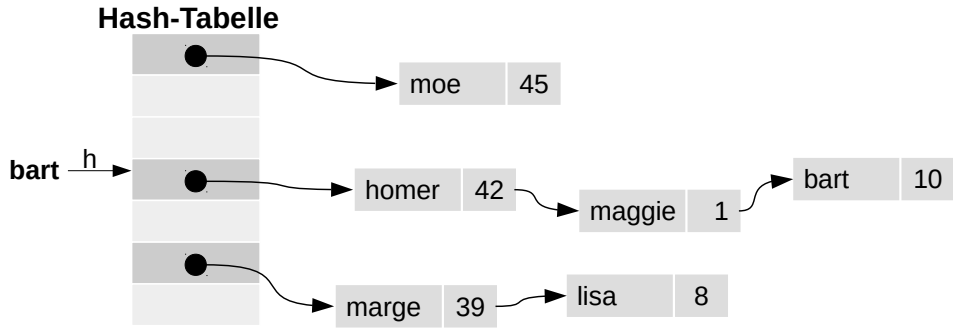
- Die Schlüssel-Wert-Paare befinden sich nicht in der **Tabelle selbst**, sondern in zusätzlichen **Containern** (hier: **Listen**).
- Die Schlüssel mit **gleichem** Hash-Wert "**teilen**" sich eine Liste → **keine Kollisionen**.
- **Suchen/Einfügen/Löschen**: Nachschlagen Hash-Wert, dann Operationen der entsprechenden Liste.

Verkettung: Implementierung




```
public class HashMap<K,V> {

        private class Entry {
            K key;
            V value;
        }
```

Verkettung: Aufwand



Annahmen

- **Perfekte Hash-Funktion**: Hash-Werte sind **gleich-verteilt** über die Tabelle.
- $\alpha = M/N$ sei *(immer noch)* der **Füllgrad**.

Füllgrad α	Sprünge
50%	1.25
90%	1.45
100%	1.5
200%	2
1000%	6

Entscheidender Faktor: Listenlänge

- **Durchschnittliche Länge** einer Liste ist $M/N = \alpha$.
- Bei der **erfolglosen Suche** benötigen wir also $1 + \alpha$ Sprünge *(einen in die Hash-Tabelle, und α durch die Liste)*.
- Bei einer **erfolgreichen Suche** benötigen wir $1 + \alpha/2$ Sprünge *(im Durchschnitt bis zur Mitte der Liste)*.
- **Sehr gute** Laufzeiteigschaft! Quasi kontant bei nicht überbelegter Tabelle.

Verkettung: Bewertung

- ☺ Konzeptuell **einfacher** als Sondierung.
- ☺ **Löschen** einfach möglich.
- ☺ sehr gute Laufzeit, auch bei **hohem Füllgrad**.
- ☹ Benötigt **viel Speicher**: (1) Löcher in Tabelle, (2) extra Listen
- ☹ **Entartung** möglich *(siehe Sondierung)*. Alle Werte in einer der Listen → Einfügen, Suche, Löschen sind O(n)!
- ☺ Können Entartung entgegenwirken, indem wir Listen durch **bessere Container** *(z.B. balancierte Bäume, O(log n))* ersetzen. In der Praxis ist dies meist nicht nötig.

References I