Prof. Dr. A. Poetzsch-Heffter
P. Zeller, M.Sc.

Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
AG Softwaretechnik

Zwischenklausur Logik
Montag, 19.06.2017

Nachname:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Hinweise:

1. Schreiben Sie **direkt bei Beginn** der Klausur Ihren Namen, Vornamen und Ihre Matrikelnummer **auf dieses Deckblatt**. Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer **auf jedes Blatt, das Sie bearbeiten**.
2. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur vollständig ist (13 Seiten)!
3. Sie haben 100 Minuten Zeit, die Klausur zu bearbeiten.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen gut lesbar mit Kugelschreiber oder Füllfederhalter **(kein Bleistift, kein Rotstift, kein Grünstift)**! Unleserliche Lösungen werden nicht korrigiert!
5. Sie dürfen **keine** eigene Blätter verwenden. Lassen Sie diese Klausur in Ihrem eigenen Interesse geheftet; lose Klausurblätter werden nicht korrigiert!
6. Die Aufgaben **müssen** auf den jeweiligen Blättern bearbeitet werden. Sollte der Platz nicht ausreichen, so benutzen Sie die Rückseite des betreffenden Blattes oder die Zusatzblätter am Ende der Klausur. Sollte auch dies nicht ausreichen, bekommen Sie weitere Blätter bei der Aufsicht. Verweisen Sie in jedem Fall deutlich auf die Fortsetzungen Ihrer Aufgaben!
7. **Es sind keinerlei Hilfsmittel außer Sprachwörterbüchern und einem beidseitig beschriebenen A4-Blatt mit Notizen zur Klausur zugelassen!** Die Benutzung von Handys, Smartwatches und anderen elektronischen Geräten ist nicht gestattet. Handys müssen ausgeschaltet sein! Auf Ihrem Platz darf sich kein Rucksack o. ä. befinden. **Bei Verstößen gegen diese Regelungen sowie bei Täuschungsversuchen wird die Klausur mit 0 Punkten gewertet. Täuschungsversuche werden darüber hinaus dem Prüfungsamt gemeldet.**
8. Lesen Sie vor der Bearbeitung einer Aufgabe den gesamten Aufgabentext sorgfältig durch!
9. Sie können in den meisten Fällen die Bearbeitung einer Aufgabe fortsetzen, auch wenn Sie einen Aufgabenteil nicht gelöst haben.
10. Während der Klausur wird das Deckblatt auf korrekte Daten überprüft. Legen Sie dazu am besten jetzt schon Ihren **Studentenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.

Aufgabe:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Punkte:									
Maximum:	12	8	8	5	6	5	8	10	8

Gesamtpunktzahl:	
Maximum:	70

Aufgabe 1 Wahrheitstabellen und Normalformen (__ /12 Punkte)

a) Geben Sie eine Formel A in disjunktiver Normalform (DNF) an, so dass die folgende Tabelle eine Wahrheitstafel für A ist:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

__ /3

b) Gegeben ist die Formel $B \equiv \big(p \wedge (\neg q \wedge r)\big) \vee (\neg p \wedge \neg r)$. Geben Sie eine Formel B' in konjunktiver Normalform (KNF) an, so dass $B \models\!\mid B'$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie mehrmals die Distributivität $\big(A \vee (B \wedge C) \models\!\mid (A \vee B) \wedge (A \vee C)\big)$ um die Formel umzuformen.

__ /3

c) Beweisen Sie per Induktion nach n:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ und alle $A, B_1, \ldots, B_n \in F$ gilt:
$A \vee (B_1 \wedge \cdots \wedge B_n) \models\!\!\!\!\dashv (A \vee B_1) \wedge \cdots \wedge (A \vee B_n)$

Sie können im Beweis die aus der Vorlesung bekannten logischen Äquivalenzen verwenden, insbesondere die Distributivität von $\vee$ und $\wedge$: $A \vee (B \wedge C) \models\!\!\!\!\dashv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

__ /6

Aufgabe 2 Tableaux (__ /8 Punkte)

Prüfen Sie mit der Tableaux-Methode, ob folgende Formel eine Tautologie ist:

$$A \equiv \Big(r \wedge \big((r \to \neg p) \vee (r \to \neg q)\big)\Big) \to \big(\neg p \wedge \neg q\big)$$

Aufgabe 3 Davis-Putnam (__ /8 Punkte)

Prüfen Sie mit dem Davis-Putnam-Verfahren, ob folgende Formel erfüllbar ist:

$$A \equiv (p \vee q \vee \neg r \vee t) \wedge (\neg t \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge r \wedge (\neg p \vee t \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg t)$$

Aufgabe 4 Resolution / Kompaktheitssatz (__ /5 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt: Eine Formel A in KNF ist unerfüllbar gdw. $A \vdash_{Res} \sqcup$. Wenn wir A als endliche Menge von Klauseln auffassen, gilt also: Eine endliche Mengen von Klauseln Σ ist unerfüllbar gdw. $\Sigma \vdash_{Res} \sqcup$.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik, dass diese Aussage auch für unendliche Mengen von Klauseln gilt.

Aufgabe 5 Das deduktive System $\mathcal{F}_0$ (__ /6 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ die Menge der Herleitbarkeitsaussagen der Formen:

$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg A \to A$ (Beispiel 2.12)

$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to \neg A\big)$ (Lemma 6)

$\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \to A) \to \big((\neg B \to A) \to A\big)$ (Lemma 7)

Prüfen Sie, ob die Folge $B_1, \ldots, B_9$ (siehe unten) ein abgekürzter Beweis für $\neg p, \neg q \to p \vdash_{\mathcal{F}_0} q$ in $\mathcal{F}_0$ mit Annahmen $\mathcal{H}$ ist. Geben Sie für korrekte Schritte jeweils eine Begründung an (zum Beispiel verwendetes Axiom) und markieren Sie inkorrekte Schritte, wenn vorhanden.

$B_1 \equiv \neg p$

$B_2 \equiv \neg p \to (\neg q \to \neg p)$

$B_3 \equiv \neg q \to \neg p$

$B_4 \equiv \neg q \to p$

$B_5 \equiv (\neg q \to p) \to \big((\neg q \to \neg p) \to \neg\neg q\big)$

$B_6 \equiv \neg\neg q \to q$

$B_7 \equiv (\neg q \to p) \to \big((\neg q \to \neg p) \to q\big)$

$B_8 \equiv (\neg q \to \neg p) \to q$

$B_9 \equiv q$

Zur Erinnerung :
Die Axiome von $\mathcal{F}_0$:

Ax1: $A \to (B \to A)$

Ax2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Ax3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Die Regeln von $\mathcal{F}_0$:

MP: $\dfrac{A, (A \to B)}{B}$

Aufgabe 6 Gentzen-Sequentzkalkül (__ /5 Punkte)

Leiten Sie die Sequenz $\vdash_G \big(p \to (q \wedge \neg q)\big) \to \neg p$ im Gentzen-Sequentzkalkül her. Notieren Sie im jeden Schritt, welche Regel bzw. welches Axiom verwendet wurde.

Zur Erinnerung:

Ax1: $\Gamma, A \vdash_G A, \Delta$

Ax2: $\Gamma, A, \neg A \vdash_G \Delta$

Ax3: $\Gamma \vdash_G A, \neg A, \Delta$

$\mathbf{R}_\wedge$: $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash_G \Delta}$

$\mathbf{R}_\vee$: $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, B, \Delta}{\Gamma \vdash_G A \vee B, \Delta}$

$\mathbf{R}_{\to 1}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta, B}{\Gamma \vdash_G A \to B, \Delta}$

$\mathbf{R}_{\to 2}$: $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta; \quad \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash_G \Delta}$

$\mathbf{R}_{\neg 1}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta}{\Gamma \vdash_G \neg A, \Delta}$

$\mathbf{R}_{\neg 2}$: $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash_G \Delta}$

$\mathbf{R}_{\wedge'}$: $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta; \quad \Gamma \vdash_G B, \Delta}{\Gamma \vdash_G A \wedge B, \Delta}$

$\mathbf{R}_{\vee'}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta; \quad \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash_G \Delta}$

Aufgabe 7 Induktion / Duale Formeln (__ /8 Punkte)

In der Vorlesung wurde definiert:

Die duale Formel $d(A)$ einer Formel $A \in F$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} d(p) &\equiv p \quad \text{für } p \in V \\ d(\neg A) &\equiv \neg d(A) \\ d(B \vee C) &\equiv d(B) \wedge d(C) \\ d(B \wedge C) &\equiv d(B) \vee d(C). \end{aligned}$$

Beweisen Sie per struktureller Induktion:

Seien φ und ψ Belegungen mit $\varphi(p) = 1 - \psi(p)$ für alle $p \in V$.
Dann gilt für alle Formeln $A \in F_{\{\neg,\vee,\wedge\}}$: $\quad \mathcal{B}_\varphi\left(d(A)\right) = 1 - \mathcal{B}_\psi(A)$.

Dies ist Lemma 3.20 aus der Vorlesung, welches Sie daher im Beweis nicht verwenden sollen.

Aufgabe 8 Semantik der Prädikatenlogik (__ /10 Punkte)

Gegeben ist die Signatur $S = \left\{\left\{f_{/2}, a_{/0}, b_{/0}, c_{/0}\right\}, \left\{p_{/2}\right\}\right\}$ und die S-Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ mit $D = \left\{d_a, d_b, d_c\right\}$. Dabei werden die Funktion f und Das Prädikat p von I wie folgt interpretiert (in der Tabelle steht der erste Parameter links und der zweite Parameter oben):

f	a	b	c
a	b	b	c
b	c	b	c
c	c	c	a

p	a	b	c
a	0	1	0
b	1	1	1
c	0	0	1

Beispiele: $I(f)(d_a, d_b) = d_b$ und $I(f)(d_b, d_a) = d_c$.

Für die 0-stelligen Funktionen gilt: $I(a) = d_a$, $I(b) = d_b$ und $I(c) = d_c$.

Außerdem Sei ψ eine Belegung mit $\psi(x) = d_a$ für alle Variablen $x \in V$.

Geben Sie jeweils das Ergebnis der Bewertung an. Begründen Sie bei Formeln mit Quantoren kurz ihr Ergebnis.

a) $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}\left(f(c, f(b, c))\right) =$

b) $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}\left(p(x, c)\right) =$

c) $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}\left(\exists x.\forall y.\ p(x, y)\right) =$

d) $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}\left(\exists x.\forall y.\ p(y, x)\right) =$

e) $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}\left(\forall y.\exists x.\ p(y, x)\right) =$

f) $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}\left(\forall x.\ p(a, x) \to \exists y.\ f(x, y) \neq f(y, x)\right) =$

Aufgabe 9 Modellierung mit Prädikatenlogik (__ /8 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe einen Datenbereich, welcher Knoten, Kanten und Pfade in einem gerichteten Graphen sowie das Element $\perp$ umfasst. Jedes Element im Datenbereich ist von genau einer dieser 4 Arten, insbesondere betrachten wir Kanten nicht als Pfade. Intuitiv ist ein Pfad eine (möglicherweise leere) Liste von Kanten, in denen der End-Knoten der i-ten Kante der Start-Knoten der $(i + 1)$-ten Kante ist. Um Aussagen über Graphen zu formalisieren definieren wir die folgenden Prädikate und Funktionen:

Prädikat	**Bedeutung**
node(x)	wahr gdw. x ein Knoten ist
edge(x)	wahr gdw. x eine Kante ist
path(x)	wahr gdw. x ein Pfad ist

Funktion	**Bedeutung**
start(x)	Liefert den Start-Knoten von Kante oder Pfad x (bzw. $\perp$, wenn x weder Kante noch Pfad ist)
end(x)	Liefert den End-Knoten von Kante oder Pfad x (bzw. $\perp$, wenn x weder Kante noch Pfad ist)

Modellieren Sie die folgenden Aussagen mit der Prädikatenlogik und verwenden Sie dabei nur die oben definierten Prädikate und Funktionen:

a) Zu jeder Kante gibt es auch eine Kante in die entgegengesetzte Richtung.

b) An jedem Knoten startet ein Pfad, der am selben Knoten endet.

c) Es gibt einen Knoten, der von jedem anderen Knoten aus über einen Pfad erreichbar ist.

d) Wenn es einen Pfad von einem Knoten A zu einem Knoten B gibt und eine Kante von Knoten B zu einem Knoten C, dann gibt es auch einen Pfad von Knoten A zu Knoten C.

Fortsetzung von Aufgabe ____

Fortsetzung von Aufgabe ____