

Übungsblatt 13: Logik (SS 2017)

Bearbeitung in der Übung am 06./07. Juli

Aufgabe 1 Presburger Arithmethik

Sei Σ_{PA} die Menge der Axiome der Presburger-Arithmetik wie in der Vorlesung definiert.

Angenommen es gilt: $\Sigma_{PA} \vdash_{\mathcal{F}} 0 + x = x \rightarrow 0 + (x + 1) = x + 1$

Beweisen Sie damit die folgenden Aussage im deduktiven System \mathcal{F} :

$$\Sigma_{PA} \vdash_{\mathcal{F}} \forall x. 0 + x = x$$

Sie können dazu das Deduktionstheorem und Generalisierungstheorem verwenden.

Zum Aufschreiben des Beweises können Sie wieder die gleichen Abkürzungen wie in Aufgabe 3 von Blatt 11 verwenden.

Aufgabe 2 Herbrand-Expansion

Sei $S = (\{a_{/0}, b_{/0}, n_{/0}, c_{/2}\}, \{e_{/2}\})$ eine Signatur und $A \in FO(S)$ definiert als:

$$A \equiv \forall x. \forall y. \forall z. e(x, c(x, y)) \wedge (e(x, z) \rightarrow e(x, c(y, z))) \wedge \neg e(a, c(b, c(a, n)))$$

- Wie sieht der Datenbereich von Herbrand-Strukturen über der Signatur S aus?
- Geben Sie Formeln A_1, \dots, A_i (mit $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) aus der Herbrand-Expansion $E(A)$ von A an, so dass $A_1 \wedge \dots \wedge A_i$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 3 Konsistenz und Erfüllbarkeit

Beweisen Sie Bemerkung 5.12 (b):

Eine Theorie T erster Stufe ist erfüllbar, genau dann wenn sie konsistent ist.

Aufgabe 4 Vollständigkeit und Konsistenz

Sei Σ eine Theorie. Zeigen Sie:

Σ ist vollständig genau dann, wenn es keine abgeschlossene Formel A gibt, so dass $\mathcal{T}_{\Sigma \cup \{A\}}$ und $\mathcal{T}_{\Sigma \cup \{\neg A\}}$ beide konsistent sind.

Bemerkung:

Sie haben also gezeigt, dass Vollständigkeit einer Theorie bedeutet, dass sich diese nicht auf sich widersprechende Weisen konsistent erweitern lässt.