Prof. Dr. A. Poetzsch-Heffter
Peter Zeller, M. Sc.

TU Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
AG Softwaretechnik

Übungsblatt 12: Logik (SS 2017)

Abgabe: Freitag, 07. Juli, 15:30
Abgabekästen neben Raum 34-401.7 (bei AG Softwaretechnik)
Bitte geben Sie zu dritt ab.

Aufgabe 1 Beweise in $\mathcal{F}$

Wir verwenden in dieser Aufgabe wieder die gleichen Abkürzungen wie in Aufgabe 3 von Blatt 11.

Geben Sie jeweils einen konstruktiven Beweis für die beiden folgenden Aussagen an. "Konstruktiv" heißt hier, dass aus dem Beweis hervorgehen soll, wie man die gewünschte Herleitung erhalten kann. Es sollen also insbesondere keine semantischen Argumente wie die Vollständigkeit von $\mathcal{F}$ verwendet werden.

a) Sei S eine Signatur, $\Gamma \subseteq FO(S)$, $A \in FO(S)$, $x \in V$ und $t \in Term(S)$.
Wenn $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} A\{x/t\}$, dann $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \exists x.\, A$

b) Sei S eine Signatur, $\Gamma \subseteq FO(S)$, $A, B \in FO(S)$ und $x \in V$.
Wenn $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{F}} B$ und x nicht frei in $\Gamma \cup \{B\}$ vorkommt, dann $\Gamma, \exists x.\, A \vdash_{\mathcal{F}} B$

Aufgabe 2 Eliminierung von Gleichheit

Sei $S = (Funk, Präd)$ eine Signatur in der e nicht vorkommt. Der Einfachheit halber betrachten wir in dieser Aufgabe die konkrete Signatur mit $Funk = \{f_{/1}\}$ und $Präd = \{p_{/1}\}$.

In der Herbrand-Theorie haben wir vorausgesetzt, dass die betrachtete Formel in $\mathrm{FO}^{\neq}(S)$ ist, d.h. keine Gleichheit beinhaltet. Wir wollen nun in dieser Aufgabe sehen, wie wir zu einer Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $A' \in \mathrm{FO}^{\neq}(S')$ über einer erweiterten Signatur $S' = (Funk, Präd')$ mit $Präd' = Präd \cup \{e_{/2}\}$ finden können, in der das Prädikat e die Gleichheit ersetzt.

a) Geben Sie eine abgeschlossene Formel $Eq \in \mathrm{FO}^{\neq}(S')$ an, die keine Gleichheit verwendet. Die Formel soll sicherstellen, dass die Interpretation von e in jedem Modell für Eq eine Äquivalenzrelation ist (reflexiv, symmetrisch, transitiv).

b) Geben Sie eine abgeschlossene Formel $K \in \mathrm{FO}^{\neq}(S')$ an, die keine Gleichheit verwendet. Die Formel soll sicherstellen, dass die Interpretation von e in jedem Modell für K eine Kongruenz ist, d.h. das Ersetzen von Parametern in Prädikaten und Funktionen durch e-äquivalente Terme führt zu einem äquivalenten Ergebnis.

c) Sei $A \in \mathrm{FO}(S)$ eine abgeschlossene Formel. Geben Sie an, wie man eine abgeschlossene Formel $A' \in \mathrm{FO}^{\neq}(S')$ konstruieren kann, die zu A erfüllbarkeitsäquivalent ist.

Begründen Sie kurz, warum es zu jedem Modell $\mathcal{M}'$ für A' ein Modell $\mathcal{M}$ für A gibt.

Aufgabe 3 Nicht-Standardmodelle

In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie man die Existenz eines Nicht-Standardmodells für die Arithmetik der natürlichen Zahlen beweisen kann. In dieser Aufgabe konstruieren wir analog ein Nichtstandardmodell für die Arithmetik der rationalen Zahlen.

Es sei $S = (\mathit{Funk}, \mathit{Präd})$ die Signatur mit Funktionssymbolen $\mathit{Funk} = \left\{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, *_{/2}\right\}$ und Prädikatssymbolen $\mathit{Präd} = \left\{<_{/2}\right\}$. Außerdem sei $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, I)$ die S-Struktur, in der der Datenbereich aus den rationalen Zahlen besteht und die Symbole 0, 1, +, $*$ und $<$ wie üblich interpretiert sind, d.h. $I(0) = 0, I(1) = 1, I(+)(d, e) = d + e$, $I(*)(d, e) = d \cdot e$ und $I(<)(d, e) = 1$ gdw. $d < e$.

Sei $\mathcal{T}_\mathcal{Q}$ die Theorie von $\mathcal{Q}$, also die Menge aller abgeschlossenen Formeln über S, für die $\mathcal{Q}$ ein Modell ist:

$$\mathcal{T}_\mathcal{Q} = \left\{A \in \mathrm{FO}_{abg}(S) \;\middle|\; \mathcal{Q} \models A\right\} .$$

Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Sigma = \mathcal{T}_\mathcal{Q} \cup \left\{0 < x\right\} \cup \left\{A_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}$$

mit

$$A_n \equiv \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n \text{ mal } 1} * x < 1$$

wobei x eine freie Variable ist.

a) Zeigen Sie, dass Σ erfüllbar ist.

   Hinweis: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

b) Zeigen Sie, dass es keine Belegung $\psi : V \to \mathbb{Q}$ gibt, so dass $\mathcal{Q}, \psi \models \Sigma$ gilt.

c) Zwei Strukturen $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ über der selben Signatur heißen *elementar äquivalent*, wenn sie die gleichen abgeschlossenen Formeln wahr machen:
   Für alle $A \in \mathrm{FO}_{abg}(S)$ gilt: $\mathcal{M} \models A$ gdw. $\mathcal{M}' \models A$.

   Zeigen Sie, dass jede Struktur $\mathcal{M}$, die Σ aus Aufgabenteil a) erfüllt, elementar äquivalent zu $\mathcal{Q}$ ist.

   Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 5.12 a).

Anmerkung: Aufgabenteil a) zeigt, dass Σ ein Modell $\mathcal{M}$ hat, und mit Aufgabenteil c) sind $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{M}$ elementar äquivalent. Aufgabenteil b) zeigt im Wesentlichen, dass $\mathcal{Q}$ nicht *isomorph* zu $\mathcal{M}$ ist. Daher nennen wir $\mathcal{M}$ *Nicht-Standardmodell*.

Aufgabe 4 Herbrand-Modelle

Sei $S = \left(\left\{a_{/0}\right\}, \left\{p_{/1}, q_{/2}\right\}\right)$ eine Signatur und $A \in FO(S)$ mit
$A \equiv p(a) \wedge \left(\forall x.\ p(x) \to \left(\exists y.\ q(x, y)\right)\right) \wedge \left(\exists x.\ \neg q(x, a)\right)$.

a) Beweisen Sie: $A \in FO(S)$ hat kein Herbrand-Modell.

b) Bringen Sie die Formel A zuerst in bereinigte Pränexnormalform (BPF) und dann in Skolemform. Geben Sie Ihre Zwischenschritte mit an.

c) Sei A' die Formel in Skolemform aus Teil b). Geben Sie eine (möglichst kleine) Signatur S' für A' an, so dass $A' \in FO(S')$.

d) Beschreiben Sie ein Herbrand-Modell für $A' \in FO(S')$.