Prof. Dr. A. Poetzsch-Heffter
Peter Zeller, M. Sc.

TU Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
AG Softwaretechnik

Übungsblatt 11: Logik (SS 2017)

Bearbeitung in der Übung am 23./24. Juni

Aufgabe 1 Axiomenschemata von $\mathcal{F}$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln Axiome des deduktiven Systems $\mathcal{F}$ sind. Falls ja, geben Sie an zu welchem der 6 Schemata die Formel gehört.

a)
$$\Big(\forall y.\ p(y) \to \big(\forall x.\ q(x,y)\big)\Big) \to \Big(\big(\forall y.\ p(y)\big) \to \big(\forall y. \forall x.\ q(x,y)\big)\Big)$$

b)
$$\bigg(\Big(\big(\forall x.\ p(x)\big) \to \big(\forall y.\ p(y)\big)\Big) \to p(z)\bigg) \to \bigg(\big(\forall x. p(x)\big) \to \Big(\big(\forall y.\ p(y)\big) \to p(z)\Big)\bigg)$$

c)
$$\forall y. \big(\forall y.\ p(y) \to p(y)\big) \to \big(p(y) \to p(y)\big)$$

d)
$$\big(\forall x.\ \neg\forall y.\ \neg p(x,y)\big) \to \big(\neg\forall y.\ \neg p(y,y)\big)$$

Aufgabe 2 Beweise im deduktiven System $\mathcal{F}$

Geben Sie einen Beweis in $\mathcal{F}$ für die folgenden Formeln an. Sie können Deduktionstheorem, Generalisierungstheorem, Kontrapositionstheorem und Inkonsistenzregel verwenden (Siehe Satz 5.4).

a)
$$\forall x.\ p(x) \quad \vdash_{\mathcal{F}} \quad \forall y.\ p(y)$$

b)
$$p(c) \quad \vdash_{\mathcal{F}} \quad \neg\forall y.\ \neg p(y)$$

Hinweise:

1. Verwenden Sie (falls möglich) das Deduktionstheorem und Generalisierungstheorem zu Beginn des Beweises.
2. Wenn die rechte Seite eine Negation einer Formel ist kann es hilfreich sein, die Inkonsistenzregel oder das Kontrapositionstheorem zu verwenden.

Aufgabe 3 Beweise in $\mathcal{F}$ (mit weiteren Abkürzungen)

In dieser Aufgabe erweitern wir das deduktive System $\mathcal{F}$ um die Operatoren $\vee$ und $\wedge$ sowie um den $\exists$-Quantor. Wir betrachten diese Operatoren in dieser Aufgabe nur als Abkürzungen für die bestehenden Operatoren:

- $\exists x.\ A$ ist Abkürzung für $\neg\forall x.\ \neg A$
- $A \wedge B$ ist Abkürzung für $\neg(A \to \neg B)$
- $A \vee B$ ist Abkürzung für $\neg A \to B$

Das heißt: In dieser Aufgabe gilt beispielsweise $\exists x.\ A \;\equiv\; \neg\forall x.\ \neg A$ (normalerweise gilt nur die logische Äquivalenz ($\models\!\!\!\dashv$) und nicht die syntaktische ($\equiv$)). Die Abkürzungen müssen immer wie oben angegeben benutzt werden. Es gilt also $\neg\exists x.\ A \;\not\equiv\; \forall x.\ \neg A$.

Neben den Abkürzungen für Operatoren erlauben wir die folgende abkürzende Schreibweise für Beweise: Falls für eine Signatur S und Formeln $A_1, \ldots, A_n, B \in FO(S)$ die Formel $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B$ oder (logisch äquivalent) $A_1 \to \Big(A_2 \to \big(\cdots \to (A_n \to B)\big)\Big)$ ein Axiom ist, dann kann die folgende Regel verwendet werden[1]:

$$\frac{A_1 \qquad \ldots \qquad A_n}{B}$$

Geben Sie einen Beweis in $\mathcal{F}$ für die folgenden Formeln an. Sie können Deduktionstheorem, Generalisierungstheorem, Kontrapositionstheorem und Inkonsistenzregel verwenden (Siehe Satz 5.4).

a)
$$\big(\forall x.\ p(x)\big) \wedge \big(\forall x.\ q(x)\big) \quad \vdash_{\mathcal{F}} \quad \forall x.\ p(x) \wedge q(x)$$

b)
$$(\exists x.\ A) \vee (\exists x.\ B) \quad \vdash_{\mathcal{F}} \quad \exists x.\ A \vee B$$

c)
$$\vdash_{\mathcal{F}} \quad \exists x.\ \Big(p(x) \to \big(\forall x.\ p(x)\big)\Big)$$

[1] In beiden Fällen lässt sich dann leicht $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{F}} B$ herleiten. Wenn wir diese Herleitung als Annahme verwenden, dann darf also nach der Definition von "abgekürzter Beweis" die Regel verwendet werden.
Zum Beispiel ist $\big(p(x) \wedge q(x)\big) \to p(x)$ ein Axiom (Axiomenschema 1) und ergibt für diese Aufgabe die folgende Regel:

$$\frac{p(x) \wedge q(x)}{p(x)}$$