Prof. Dr. A. Poetzsch-Heffter
Peter Zeller, M. Sc.

TU Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
AG Softwaretechnik

Übungsblatt 10: Logik (SS 2017)

Abgabe: Freitag, 23. Juni, 15:30
Abgabekästen neben Raum 34-401.7 (bei AG Softwaretechnik)
Bitte geben Sie zu dritt ab.

Die Zwischenklausur findet am Montag, 19.06.2017 um 19:00 Uhr in Raum 46-220 statt.

Bereiten Sie sich auf die Zwischenklausur vor. Dazu kann es auch helfen, mit Aufgaben aus alten Klausuren zu üben. Diese finden Sie unter https://kai.cs.uni-kl.de/ (nur aus dem Uni-Netz erreichbar).

Aufgabe 1 Semantik der Prädikatenlogik

Seien $A, B \in FO(S)$ beliebige Formeln über eine Signatur S. Verwenden Sie die Semantik der Prädikatenlogik um zu zeigen: $(\exists x.\ A) \lor (\exists x.\ B) \models \exists x.\ A \lor B$

Damit haben Sie einen Teil von Äquivalenz 9 aus Lemma 4.14 gezeigt.

Aufgabe 2 Substitution

a) Sei $A \equiv \forall x. \left(\exists y.\ p\left(x, f(x,y)\right)\right) \to \left(\left(\forall x.\ p(x,y)\right) \land \left(\forall x.\ p(y,x)\right)\right)$

   Sei $\theta = \left\{y / f(x,y)\right\}$ eine Substitution. Berechnen Sie $A\theta$ (die Anwendung der Substitution θ auf die Formel A) nach der Definition aus der Vorlesung. Geben Sie alle Zwischenschritte mit an.

b) Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels: $(\forall x.\ A) \to A\left\{x/t\right\}$ wäre nicht für alle Formeln A allgemeingültig, wenn beim Anwenden der Substitution gebundene Variablen nicht umbenannt würden (das heißt, wenn wir für Quantoren Q das Anwenden einer Substitution als $(Qx.\ A)\theta := Qx.\ (A\theta)$ definiert hätten).

Aufgabe 3 Normalformen

a) Bringen Sie die folgenden Formeln zuerst in bereinigte Pränexnormalform (BPF) und dann in Skolemform. Geben Sie Ihre Zwischenschritte mit an.

   $A_1 \equiv \forall x. \forall y.\ x < y \to \left(\exists z.\ x < z \land z < y\right)$

   $A_2 \equiv \forall x_1. \exists x_2. \forall x_3. \exists x_4.\ p(x_1, x_2, x_3, x_4)$

   $A_3 \equiv \left(\forall x.\ p(x)\right) \lor \left(\forall x. \exists y.\ q(x,y)\right)$

   $A_4 \equiv \forall y.\ \left(\forall x.\ p(x,y)\right) \to \left(\forall x.\ p(y,x) \land \left(\exists y.\ q(y)\right)\right)$

b) Sei A_1' Ihre Skolemform zur Formel A_1. Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M}$ und Belegung ψ an, so dass $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A_1) \neq \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}\left(A_1'\right)$.

c) Sei A_1' Ihre Skolemform zur Formel A_1. Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ an, welche sowohl Modell für A_1 als auch für A_1' ist. Dabei soll $D = \mathbb{R}$ (die reellen Zahlen) sein und $I(<)(x,y) = x < y$ gelten.