

Übungsblatt 9: Logik (SS 2017)

Bearbeitung in der Übung am 08./09. Juni

Beachten Sie: Zu den Übungen nächste Woche Donnerstag (Fronleichnam) wird es wieder **Ersatztermine** geben. Wegen der **Zwischenklausur** am 19.06. werden die Ersatztermine diesmal zu folgenden Terminen stattfinden:

Gruppe 1: Montag, 19.06. 11:45 Uhr

Gruppe 2: Montag, 19.06. 10:00 Uhr

Gruppe 3: Dienstag, 13.06. 11:45 Uhr (**Achtung: Diesmal schon vor dem Feiertag!**)

Sie können wie beim letzten mal im Stats auch einen anderen Ersatztermin wählen. Details finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung.

Aufgabe 1 Bewertungen

Sei $S = \{ \{ +_{/2}, *_{/2} \}, \{ even_{/1} \} \}$ eine Signatur. Über diese Signatur definieren wir die Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ mit Datenbereich $D = \{0, 1, 2\}$. Die Funktionen $+$ und $*$ werden von I wie in folgender Tabelle gezeigt interpretiert:

x	y	x + y	x*y
0	0	0	0
0	1	1	0
0	2	2	0
1	0	1	0
1	1	2	1
1	2	0	2
2	0	2	0
2	1	0	2
2	2	1	1

Außerdem gilt $I(even)(x) = 0$ gdw. $x = 1$.

Beantworten Sie die Fragen a) - c) für die Formeln A_1 bis A_5 :

$$A_1 \equiv \forall z. z = x \rightarrow (\forall x. z = x)$$

$$A_2 \equiv \exists n. \forall x. x + n = x$$

$$A_3 \equiv \forall x. \exists y. x * y \neq x$$

$$A_4 \equiv \exists z. \forall x. x \neq z \rightarrow (\exists y. x * y \neq x)$$

$$A_5 \equiv \exists x. \forall y. even(x + y)$$

- Welche Variablen kommen gebunden vor, welche sind frei?
- Ist die Formel abgeschlossen?
- Was ergibt die Bewertung $\mathcal{B}_\psi^{\mathcal{M}}(A_i)$, wenn ψ die Belegung mit $\psi(x) = 1$ für alle Variablen x ist?

Aufgabe 2 Semantik

Geben Sie für folgende Formeln jeweils eine Struktur an, welche die Formel nicht erfüllt und eine Struktur, welche die Formel erfüllt (also ein Modell).

- a) $(\forall y. \exists x. p(x, y)) \leftrightarrow (\exists x. \forall y. p(x, y))$
- b) $\forall y. (\exists x. p(x) \rightarrow q(y)) \rightarrow ((\exists x. p(x)) \rightarrow q(y))$

Aufgabe 3 Modellierung

Wir betrachten in dieser Aufgabe einen Datenbereich, welcher Mengen und natürliche Zahlen umfasst. Gegeben sind dazu die folgenden Prädikate und Funktionen:

Prädikat	Bedeutung
set(x)	wahr gdw. x eine Menge ist
number(x)	wahr gdw. x eine natürliche Zahl ist
$x \in S$	wahr gdw. S eine Menge ist und x ein Element von S ist
$A \subseteq B$	wahr gdw. A und B Mengen sind und A eine Teilmenge von B ist
finite(S)	wahr gdw. S eine endliche Menge ist

Funktion	Bedeutung
$A \cup B$	Liefert die Vereinigung der Mengen A und B (bzw. die Leere Menge wenn A oder B keine Menge ist)
$A \cap B$	Liefert die Schnittmenge der Mengen A und B (bzw. die Leere Menge wenn A oder B keine Menge ist)
$\{\}$	Die leere Menge
$\{x\}$	Die Menge, die nur x enthält

Modellieren Sie die folgenden Aussagen mit Formeln der Prädikatenlogik und verwenden Sie dabei nur die oben definierten Prädikate und Funktionen:

- a) Wenn alle Elemente aus einer Menge A auch Elemente von B sind, dann ist A eine Teilmenge von B.
- b) Wenn es ein x gibt, das Element einer Menge A ist, dann ist {x} eine Teilmenge von A.
- c) Zu jeder Menge A gibt es eine Menge A', welche genau die endlichen Teilmengen von A enthält.
- d) Es gibt keine Menge, die sich selbst als Element enthält.
- e) Wenn A keine Teilmenge von B ist, dann gibt es in A ein Element das nicht in B vorkommt.
- f) Die Schnittmenge zweier Mengen ist leer, genau dann wenn beide Mengen kein Element gemeinsam haben.