Prof. Dr. A. Poetzsch-Heffter
Peter Zeller, M. Sc.

TU Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
AG Softwaretechnik

Übungsblatt 5: Logik (SS 2017)

Bearbeitung in der Übung am 11./12. Mai

Aufgabe 1 Verallgemeinerung von Beweisen in $\mathcal{F}_0$

Zeigen Sie, dass sich Beweise in $\mathcal{F}_0$ verallgemeinern lassen: Wenn es einen Beweis mit einer Variablen p gibt, dann lässt sich p durch eine beliebige Formel ersetzen und man erhält einen neuen, gültigen Beweis.

Um diese Aussage Formal aufzuschreiben verwenden wir das Prinzip der Substitution. Für eine Formel A ist $A[B/p]$ (sprich: A mit B für p) die Formel, die entsteht, wenn man in A alle Vorkommen der Variablen p durch B ersetzt. Formal definieren wir Substitution rekursiv über die Struktur der Formeln:

$$(\neg A)[B/p] \equiv (\neg A[B/p]) \qquad (A_1 \to A_2)[B/p] \equiv (A_1[B/p] \to A_2[B/p]) \qquad p_i[B/p] \equiv \begin{cases} B & \text{falls } p_i \equiv p \\ p_i & \text{falls } p_i \not\equiv p \end{cases}$$

Für eine Formelmenge Σ ist $\Sigma[B/p] = \left\{A[B/p] \,\middle|\, A \in \Sigma\right\}$, also die Menge in der die Substitution auf alle Formeln aus Σ angewendet wurde.

Damit lässt sich die zu zeigende Aussage präzise formulieren:

Aus $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ folgt $\Sigma[B/p] \vdash_{\mathcal{F}_0} A[B/p]$ für alle $B \in F_0$ und $p \in V$.

Aufgabe 2 Die Inkonsistenzregel für $\mathcal{F}_0$

Sie dürfen für die Bearbeitung dieser Aufgabe die folgenden Annahmen verwenden:

Für alle $A, B, C \in F_0 = F_{\{\neg,\to\}}$ gelten:

$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to (B \to A)$	(Axiomenschema 1)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$	(Axiomenschema 2)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$	(Axiomenschema 3)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to A$	(Beispiel 2.10: Triviale Implikation)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg A \to A$	(Beispiel 2.12: Doppelnegation entfernen)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$	(1: Transitivität der Implikation)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg B \to (B \to A)$	(2: Folgerung aus Inkonsistenz)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to \neg\neg A$	(3: Doppelnegation einführen)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	(4: Kontraposition)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to \neg A\big)$	(6: Negation aus Inkonsistenz / Widerspruchsbeweis)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \to A) \to \big((\neg B \to A) \to A\big)$	(7: Eliminierung von Annahmen / Fallunterscheidung)

a) Zeigen Sie, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann gilt, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ in $\mathcal{F}_0$ inkonsistent ist. Sie können das Deduktionstheorem und die oben angegebenen Lemmata verwenden.

Diese Äquivalenz wird auch **Inkonsistenzregel** genannt.

Zur Erinnerung: Eine Menge Σ ist inkonsistent in $\mathcal{F}_0$, gdw. es eine Formel B gibt mit $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} B$ und $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg B$.

b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen. Sie können die oben angegebenen Lemmata, die Inkonsistenzregel und das Deduktionstheorem verwenden, *nicht jedoch* die Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$.

1. $\neg(p \to q) \vdash_{\mathcal{F}_0} q \to p$
2. $r \to \neg(p \to p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$
3. $p \to (q \to r) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r \to (q \to \neg p)$
4. $\vdash_{\mathcal{F}_0} p \to \big(\neg q \to \neg(p \to q)\big)$