Prof. Dr. A. Poetzsch-Heffter
Peter Zeller, M. Sc.

TU Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
AG Softwaretechnik

Übungsblatt 4: Logik (SS 2017)

Abgabe: Freitag, 12. Mai, 15:30
Abgabekästen neben Raum 34-401.7 (bei AG Softwaretechnik)
Bitte geben Sie zu dritt ab.

Aufgabe 1 Vollständige Operatorenmengen

a) Wir wollen zeigen, dass die Menge $F_{\{\vee,\wedge\}}$ nur erfüllbare Formeln enthält. Erklären Sie, warum es schwierig ist, direkt per Induktion zu zeigen, dass jede Formel in $F_{\{\vee,\wedge\}}$ erfüllbar ist.

b) Stattdessen müssen wir eine stärkere Aussage per Induktion beweisen:
Finden Sie eine Belegung der Variablen ψ, die alle Formeln in $F_{\{\vee,\wedge\}}$ erfüllt und beweisen Sie diese Eigenschaft durch Induktion.

c) Schließen Sie aus b), dass $\{\vee, \wedge\}$ keine vollständige Operatorenmenge ist.

d) Sei $\bar{\wedge}$ (**NAND**) ein Operator, so dass für alle Formeln A,B und alle Belegungen ψ gilt:

$$\mathcal{B}_\psi\left(A \mathbin{\bar{\wedge}} B\right) = 1 - \min\left(\mathcal{B}_\psi(A), \mathcal{B}_\psi(B)\right) = \mathcal{B}_\psi\left(\neg(A \wedge B)\right)$$

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass die Menge $\left\{\bar{\wedge}\right\}$ eine vollständige Operatorenmenge ist. Sie können im Beweis annehmen, dass $\{\neg, \vee\}$ eine vollständig Operatorenmenge ist.

Aufgabe 2 Kompaktheitssatz

Es sei $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Formelmengen.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass die Vereinigung $\Sigma = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$ erfüllbar ist, genau dann, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ die Menge Σ_i erfüllbar ist.

b) Gilt a) auch, wenn $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ einfach nur eine Folge von Formelmengen und keine aufsteigende Kette ist (d.h. es gilt nicht unbedingt $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$) ?

Aufgabe 3 Normalformen und Erfüllbarkeit

Ein *Literal* L ist eine Formel der Form p oder $\neg p$, wobei p eine Aussagenvariable ist. Eine *Coklausel* K ist eine Konjunktion von Literalen, $K \equiv L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$. Eine Formel F ist in *disjunktiver Normalform (DNF)*, wenn sie eine Disjunktion von Coklauseln ist, d.h. $F \equiv K_1 \vee \cdots \vee K_m$.

a) Beschreiben Sie, wie man zu einer Formel A in F eine logisch äquivalente Formel B in DNF konstruieren kann.

b) Das Überprüfen von Erfüllbarkeit ist das wichtigste algorithmische Problem der Aussagenlogik. Geben Sie ein Verfahren an, das für eine Formel A in DNF entscheidet, ob sie erfüllbar ist. Der Algorithmus soll dabei eine Laufzeit in $O\left(|A|^2\right)$ haben.

c) Der folgende Algorithmus nimmt eine Formel $A \in F$ und entscheidet, ob diese erfüllbar ist. Erklären Sie, warum der Algorithmus keine polynomielle Laufzeit hat (also nicht in $O\left(|A|^k\right)$ liegt, für ein festes k).

   1. Finde zur gegebenen Formel A eine logisch äquivalente Formel B in DNF mit dem Verfahren aus Teil a).
   2. Entscheide mit dem Algorithmus aus Teil b), ob B erfüllbar ist.

Aufgabe 4 Beweise im deduktivem System $\mathcal{F}_0$

Beachten Sie in dieser Aufgabe, die Definition von Beweisen in deduktiven System. Insbesondere sollten Sie sich noch einmal den Unterschied zwischen einem Beweis in einem deduktiven System, einem abgekürzten Beweis in einem deduktivem System und einem Beweis außerhalb des deduktivem Systems klar machen.

Verwenden Sie jeweils nur die angegeben Mittel für Ihre Beweise. Insbesondere sollen Sie nicht über die Semantik der Aussagenlogik argumentieren.

a) Prüfen Sie, ob der folgende Beweis in $\mathcal{F}_0$ korrekt ist. Geben Sie für korrekte Schritte jeweils eine Begründung an, das heißt welches Axiom oder welche Regel verwendet wurde.

$$B_1 \equiv (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$
$$B_2 \equiv \Big((\neg A \to \neg B) \to (B \to A)\Big) \to \Big(\big((\neg A \to \neg B) \to B\big) \to \big((\neg A \to \neg B) \to A\big)\Big)$$
$$B_3 \equiv \big((\neg A \to \neg B) \to B\big) \to \big((\neg A \to \neg B) \to A\big)$$

b) Zeigen Sie, dass es einen Beweis für $(A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$ im deduktiven System $\mathcal{F}_0$ gibt. Sie können dazu das Deduktionstheorem verwenden.

c) Geben Sie einen abgekürzten Beweis für $B \to \neg\neg B$ im deduktivem System $\mathcal{F}_0$ an. Sie können im abgekürzten Beweis annehmen, dass $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg A \to A$ für alle Formeln A gilt.

d) Zeigen Sie, dass es einen Beweis für $(A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to (A \to C)\big)$ im deduktivem System $\mathcal{F}_0$ gibt. Sie können dafür das Deduktionstheorem verwenden sowie abgekürzte Beweise mit der Annahme, dass die Aussagen 1-5 aus Lemma 2.13 bereits bewiesen sind.

e) *(Freiwillige Aufgabe, keine Punkte)* Führen Sie Ihre Beweise aus den vorherigen Teilaufgaben im Tool *Isabelle*. Eine Anleitung dazu finden Sie beim Material zu dieser Übung.

   Wenn Sie diese freiwillige Aufgabe gelöst haben, können Sie Ihren Isabelle Code (`thy`-Datei) per Mail an Ihren Tutor schicken. Die entsprechenden handschriftlichen Beweise aus den vorherigen Teilaufgaben müssen Sie dann nicht unbedingt abgeben.