Prof. Dr. A. Poetzsch-Heffter
Peter Zeller, M. Sc.

TU Kaiserslautern
Fachbereich Informatik
AG Softwaretechnik

Übungsblatt 1: Logik (SS 2017)

Bearbeitung in der Übung am 20./21. April

Aufgabe 1 Diätplan

„Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?“ wurde ein 100-jähriger gefragt. „Ich halte mich streng an die folgenden Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu der Mahlzeit trinke, dann esse ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zusammen habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme esse oder Bier meide, rühre ich Fisch nicht an.“, antwortete er. Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend.

Formalisieren Sie den Diätplan mit Aussageformen und versuchen Sie, eine weniger verwirrende Formulierung zu finden.

Aufgabe 2 Strukturelle Induktion

Sei $v(A)$ die Anzahl der Vorkommen von Variablen in einer aussagenlogischen Formel A, $k(A)$ die Anzahl der Klammerpaare in A, $op(A)$ die Anzahl der Operatoren in A und $bop(A)$ die Anzahl der binären Operatoren in A.

Diese Funktionen lassen sich wie folgt rekursiv über die Struktur der Formeln definieren, wobei * für einen beliebigen binären Operator aus $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ steht:

$$
\begin{array}{lll}
v(p_i) = 1 & v\big((\neg A)\big) = v(A) & v\big((A * B)\big) = v(A) + v(B) \\
k(p_i) = 0 & k\big((\neg A)\big) = 1 + k(A) & k\big((A * B)\big) = 1 + k(A) + k(B) \\
op(p_i) = 0 & op\big((\neg A)\big) = 1 + op(A) & op\big((A * B)\big) = 1 + op(A) + op(B) \\
bop(p_i) = 0 & bop\big((\neg A)\big) = bop(A) & bop\big((A * B)\big) = 1 + bop(A) + bop(B)
\end{array}
$$

Beweisen Sie mit struktureller Induktion *über den Aufbau* der aussagenlogischen Formeln:

a) In jeder aussagenlogischen Formel $A \in F$ ist die Anzahl der Klammerpaare gleich der Anzahl der Operatoren:

   Für alle $A \in F$ gilt: $k(A) = op(A)$

   Hinweis: Wir betrachten hier **nicht** die abkürzende Schreibweise, die das Weglassen von Klammerpaaren erlaubt. Dafür wäre die Aussage nicht korrekt.

b) Sei n die Anzahl der Vorkommen von Variablen von $A \in F$. Dann ist die Anzahl der Operatoren in A mindestens $n - 2$:

   Für alle $A \in F$ gilt: $op(A) \geq v(A) - 2$

c) Es gibt immer ein Variablenvorkommen mehr als es binäre Operatoren gibt.

   Für alle $A \in F$ gilt: $v(A) = 1 + bop(A)$