Algorithmische Verfahren für die Prädikatenlogik

Ziele:

- Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit von Allgemeingültigkeit bzw. Unerfüllbarkeit
- Praktische Semi-Entscheidungsverfahren für Allgemeingültigkeit bzw. Unerfüllbarkeit

Zur Erinnerung:

Allgemeingültigkeit: $\models A$ gdw. $\neg A$ unerfüllbar.

Logische Folgerung: $\Sigma \models A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar.

Übersicht:

- Das Allgemeingültigkeitsproblem und die Herbrand-Theorie
- Semantische Tableaus
- Prädikatenlogische Resolution

Das Allgemeingültigkeitsproblem

Untersuche Berechenbarkeit des **Allgemeingültigkeitsproblems**:

Gegeben: Eine Formel $A \in FO(S)$.
Frage: Ist A allgemeingültig?

Ziel: Allgemeingültigkeit ist **vollständig in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme**. Genauer:

Obere Schranke:
Allgemeingültigkeit ist semi-entscheidbar.

Untere Schranke:
Das Allgemeingültigkeitsproblem ist hart in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme.

Insbesondere ist Allgemeingültigkeit **unentscheidbar**.

Bewertung abgeschlossener Formeln

Definition 6.1

Sei $A \in FO_{abg}(S)$; dann definieren wir:

$$\mathcal{B}^{\mathcal{M}}(A) := \mathcal{B}^{\mathcal{M}}_{\psi}(A) \text{ für beliebiges } \psi.$$

Bemerkung:
$\mathcal{B}^{\mathcal{M}}(A)$ ist wohldefiniert, da für abgeschlossene A für alle ψ, ψ' gilt:

$$\mathcal{B}^{\mathcal{M}}_{\psi}(A) = \mathcal{B}^{\mathcal{M}}_{\psi'}(A)$$

Herbrand-Theorie

Um Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit zu zeigen, nutze

$$A \in FO(S) \text{ ist allgemeingültig} \quad \text{gdw.} \quad \neg A \text{ ist unerfüllbar.}$$

Ziel: Unerfüllbarkeit ist semi-entscheidbar.

Problem: Bei der Wahl von $\mathcal{M} = (D, I)$ ist der Datenbereich beliebig.

- Keine Aussage über die Mächtigkeit von D.
- Keine Information über die Struktur von I.

Wie soll man Strukturen aufzählen und auf Modelleigenschaft prüfen?

Kernbeitrag: Die Suche nach Modellen kann auf **kanonische Strukturen** eingeschränkt werden.
Um ein Modell für A zu finden, **genügt es**, in folgendem Datenbereich zu suchen

$$D_{\mathcal{H}} = \text{Alle variablenfreien Terme über Signatur } S.$$

Herbrand-Theorie (Fort.)

Seien im Folgenden $S = (Funk, Präd)$, so dass *Funk* mindestens eine Konstante enthält, und $FO^{\neq}(S)$ die S-Formeln ohne $=$.

Definition 6.2 (Herbrand-Struktur)

Eine Struktur $\mathcal{H}$ von S heißt Herbrand-Struktur, falls $\mathcal{H} = (D_{\mathcal{H}}, I_{\mathcal{H}})$.
Dabei ist $D_{\mathcal{H}}$ die kleinste Menge, für die gilt:

i) Falls $a/_0 \in Funk$, dann $a \in D_{\mathcal{H}}$

ii) Falls $f/_n \in Funk$ und $t_1, \ldots, t_n \in D_{\mathcal{H}}$, dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in D_{\mathcal{H}}$.

Die Interpretation $I_{\mathcal{H}}(f) : D_{\mathcal{H}}^n \to D_{\mathcal{H}}$ der Funktionssymbole $f/_n \in Funk$ ist festgelegt als

$$I_{\mathcal{H}}(f)(t_1, \ldots, t_n) := f(t_1, \ldots, t_n).$$

Die Interpretation der Prädikatssymbole ist noch offen, eine Herbrand-Struktur muss nur diesen beiden Einschränkungen genügen.

Herbrand-Theorie (Fort.)

Gegeben sei eine abgeschlossene Formel $A \in FO^{\neq}(S)$. Eine Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} \models A$ heißt auch **Herbrand-Modell** von A.

Satz 6.3 (Herbrand)

Sei $A \in FO^{\neq}(S)$ eine abgeschlossene Formel in Skolemnormalform. Dann gilt:

A ist erfüllbar **gdw.** *A hat ein* **Herbrand-Modell***.*

Korollar 6.4 (Satz von Löwenheim-Skolem)

Sei $A \in FO(S)$ erfüllbar. Dann besitzt A ein Modell $\mathcal{M} = (D, I)$, dessen Datenbereich D **abzählbar** *ist.*

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit

Definition 6.5 (Herbrand-Expansion)

Sei $A \equiv \forall y_1 \dots \forall y_n . B \in FO^{\neq}(S)$ abgeschlossen und in Skolemnormalform. Dann ist die Herbrand-Expansion $E(A)$ von A definiert als

$$E(A) := \{B\{y_1/t_1\} \dots \{y_n/t_n\} \;\mid\; t_1, \dots, t_n \in D_{\mathcal{H}}\}.$$

Es werden also alle Variablen in B durch Terme in $D_{\mathcal{H}}$ ersetzt.

Beobachtung:
Betrachte die atomaren Teilformeln $p(t_1, \dots, t_n)$ in $E(A)$. Nach Konstruktion enthalten die t_i keine Variablen. In Herbrand-Strukturen $\mathcal{H}$ gilt also für beliebiges ψ: $\mathcal{B}_{\psi}^{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{B}_{\psi}^{\mathcal{H}}(t')$ gdw. $t = t'$

Betrachtet man die $p(t_1, \dots, t_n)$ als aussagenlogische Variable, ist $E(A)$ eine Menge aussagenlogischer Formeln. Die Herbrand-Strukturen unterscheiden sich dann in der Interpretation dieser Variablen und entsprechen damit aussagenlogischen Belegungen.

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Fort.)

Satz 6.6 (Gödel-Herbrand-Skolem)

Für eine abgeschlossene Formel $A \in FO^{\neq}(S)$ in Skolemnormalform gilt:

$$A \text{ ist erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad E(A) \text{ ist aussagenlogisch erfüllbar.}$$

Intuition: Die prädikatenlogische Formel A wird durch die aussagenlogischen Formeln in $E(A)$ approximiert.

Kombiniere Satz 6.6 mit dem Kompaktheitssatz der Aussagenlogik.

Korollar 6.7

Eine abgeschlossene Formel $A \in FO^{\neq}(S)$ in Skolemnormalform ist unerfüllbar gdw. es eine **endliche** *Teilmenge von $E(A)$ gibt, die unerfüllbar ist.*

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Fort.)

Damit folgt die Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit:

$$A \in FO(S) \text{ ist allgemeingültig} \quad \text{gdw.} \quad \neg A \text{ ist unerfüllbar.}$$

Überführe $\neg A$ in eine abgeschlossene Formel $B \in FO^{\neq}(S \uplus Sko)$ in Skolemnormalform.

Obige Argumentation liefert den **Algorithmus von Gilmore**, der Unerfüllbarkeit von B semi-entscheidet.

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Fort.)

Algorithmus von Gilmore:

Input: $A \in FO^{\neq}(S \uplus Sko)$ abgeschlossen und in Skolemnormalform.
Sei $E(A) = \{A_1, A_2, \ldots\}$ eine Aufzählung von $E(A)$.

n:=1
while $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ ist aussagenlogisch erfüllbar **do**
  n:=n+1
end while
return unerfüllbar

Mit Korollar 6.7:
Terminiert und liefert korrektes Ergebnis auf unerfüllbaren Formeln.
Terminiert nicht auf erfüllbaren Formeln.

Satz 6.8

Das Allgemeingültigkeitsproblem ist semi-entscheidbar.

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Fort.)

Beachte: Aus der Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit folgt **nicht** mittels Negation der Formel die Entscheidbarkeit:

$$\not\models A \quad \text{ist } \textbf{nicht} \text{ äquivalent zu} \quad \models \neg A.$$

Nur Letzteres lässt sich mittels Herbrand-Expansion prüfen.

Zeige nun tatsächlich **Unentscheidbarkeit** der Allgemeingültigkeit.

Untere Schranke für Allgemeingültigkeit

Ziel: Das Allgemeingültigkeitsproblem ist **hart** in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme.

Das heißt, **jedes** semi-entscheidbare Problem besitzt eine many-one Reduktion auf Allgemeingültigkeit.

Konsequenz: Allgemeingültigkeit ist **unentscheidbar** (Halteproblem).

Definition 6.9 (Many-one Reduktion)

Eine **many-one Reduktion** eines Problems P_1 auf ein Problem P_2 ist eine totale und berechenbare Funktion $f : P_1 \rightarrow P_2$, die Instanzen des Problems P_1 auf Instanzen des Problems P_2 abbildet, so dass

Instanz K von P_1 hat Lösung gdw. Instanz $f(K)$ von P_2 hat Lösung.

Untere Schranke für Allgemeingültigkeit (Fort.)

Wie beweist man Härte von Allgemeingültigkeit? Es ist eine allquantifizierte Aussage.

Betrachte ein bereits als hart bekanntes Problem. Wähle hier das **Postsche Korrespondenzproblem (PCP)**.

Gib eine many-one Reduktion **von PCP auf Allgemeingültigkeit** an.

Warum zeigt diese Reduktion Härte von Allgemeingültigkeit?

Sei P ein semi-entscheidbares Problem und f_P dessen Reduktion auf PCP. Reduktion f_P existiert, da PCP hart ist.

Sei f die Reduktion von PCP auf Allgmeingültigkeit, die noch zu finden ist.

Dann gilt:

$$\text{P} \xrightarrow{f_P} \text{PCP} \xrightarrow{f} \text{Allgemein} \quad \text{impliziert} \quad \text{P} \xrightarrow{f \circ f_P} \text{Allgemein.}$$

Das Postsche Korrespondenzproblem

Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren

$$((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)) \quad \text{mit} \quad x_i, y_i \in \{0, 1\}^+.$$

Frage: Gibt es eine nicht-leere Folge $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}.$$

Eine gegebene Folge von Wortpaaren ist eine **PCP-Instanz** K.
Eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k$, die obiger Gleichheit genügt, heißt **Lösung der Instanz** K.

Satz 6.10 (Post 1946)

PCP ist vollständig in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme, also

(a) *PCP ist semi-entscheidbar und*

(b) *jedes semi-entscheidbare Problem besitzt eine many-one Reduktion auf PCP. Insbesondere ist PCP also* **unentscheidbar**.

Untere Schranke für Allgemeingültigkeit (Fort.)

Satz 6.11 (Church)

Das Allgemeingültigkeitsproblem ist **hart** *in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme. Mit Satz 6.8 ist es also auch* **vollständig** *in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme.*

Korollar 6.12

Das Allgemeingültigkeitsproblem ist unentscheidbar.

Semantische Tableaus

Betrachte abgeschlossene Formeln in $FO^{\neq}(S)$, also Formeln ohne $=$.

Definition 6.13

Formeln aus $FO^{\neq}(S)$ lassen sich in Klassen einteilen:

- (Negierte) atomare Formeln: $p(t_1, \ldots, t_n)$, $\neg p(t_1, \ldots, t_n)$.
- α-Formeln: $A \wedge B$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \rightarrow B)$, $\neg\neg A$.
- β-Formeln: $\neg(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$.
- γ-**Formeln**: $\forall x A$, $\neg\exists x A$.
- δ-**Formeln**: $\exists x A$, $\neg\forall x A$.

Semantische Tableaus (Fort.)

Tableau-Konstruktion:

α, β-Formeln: Wie gehabt.

γ-Formeln:

$$\begin{array}{c|c|c} \gamma & \forall x.\ A & \neg\exists x.\ A \\ \hline \gamma[t] & A\{x/t\} & \neg A\{x/t\}, \end{array}$$

wobei t ein Grundterm ist, also keine Variablen enthält.

δ-Formeln:

$$\begin{array}{c|c|c} \delta & \exists x.\ A & \neg\forall x.\ A \\ \hline \delta[c] & A\{x/c\} & \neg A\{x/c\}, \end{array}$$

wobei c eine Funktionskonstante und **frisch für den Ast** ist.

Semantische Tableaus (Fort.)

Bemerkung zur Konstruktion:

δ-Formeln Müssen **nur einmal** "erfüllt" werden.

Lösungen von δ-Formeln dürfen nicht eingeschränkt werden: ein x mit Eigenschaft A muss nicht als y mit Eigenschaft B funktionieren.

γ-Formeln Müssen **für alle Objekte**, die eingeführt werden, gelten. Werden also **immer weiter** betrachtet.

Intuition: Systematische Konstruktion eines **Herbrand-Modells**:

- δ-Formeln werden mit Skolemisierung behandelt.
  Führe soviele Konstanten ein, wie notwendig ist.
- Wähle als Datenbereich die Terme über den Konstanten.
- Falls die Signatur keine Funktionssymbole enthält,
  besteht der Datenbereich aus den Konstanten (als Terme).

Semantische Tableaus (Fort.)

Die Beweise von **Korrektheit** und **Vollständigkeit** sind analog zum Fall der Ausssagenlogik.

Lemma 6.14

Sei $A \in FO^{\neq}(S)$ abgeschlossen und τ ein Tableau für A. Dann gilt

$$A \text{ ist erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \text{ss gibt Ast } \Gamma \in \tau : \Gamma \text{ ist erfüllbar.}$$

Semantische Tableaus (Fort.)

Definition 6.15

Eine Menge abgeschlossener Formeln $\Gamma \subseteq FO(S)$ heißt **vollständig**, falls

1. für jede α-Formel in Γ gilt $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$
2. für jede β-Formel in Γ gilt $\beta_1 \in \Gamma$ oder $\beta_2 \in \Gamma$
3. für jede γ-Formel in Γ gilt $\gamma[t] \in \Gamma$ für alle $t \in D_{\mathcal{H}(S)}$
4. für jede δ-Formel in Γ gibt es ein $t \in D_{\mathcal{H}(S)}$ mit $\delta[t] \in \Gamma$.

Die Menge Γ heißt **abgeschlossen**, falls es ein $B \in FO(S)$ gibt mit $B, \neg B \in \Gamma$. Sonst heißt Γ **offen**.

Beachte: Eingeführte Konstanten sind in der Signatur S und somit auch in den Termen $D_{\mathcal{H}(S)}$ enthalten.

Lemma 6.16 (Hintikka)

Sei $\Gamma \subseteq FO^{\neq}(S)$ vollständig. Dann ist Γ erfüllbar gdw. Γ offen ist.

Semantische Tableaus (Fort.)

Satz 6.17

Seien $A \in FO(S)$ und $\Sigma \subseteq FO(S)$.

a) $\models A$ *gdw. es gibt ein abgeschlossenes Tableau für* $\neg A$.

b) $\Sigma \models A$ *gdw. es gibt ein abgeschlossenes Tableau für* $\Sigma \cup \{\neg A\}$.

Eine **systematische Tableau-Konstruktion** garantiert, dass alle Äste vollständig sind (ggf. unendlich).

Idee einer systematischen Tableau-Konstruktion: $\Sigma, \quad \alpha, \; \delta, \; \gamma, \; \beta$

Mit der Annahme einer systematischen Tableau-Konstruktion erhält man ein **Semi-Entscheidungsverfahren** für Allgemeingültigkeit.

Satz 6.18

Falls $A \in FO(S)$ allgemeingültig ist, wird von der systematischen Tableau-Konstruktion ein abgeschlossenes Tableau für $\neg A$ erstellt.

Semantische Tableaus (Fort.)

Tableaus sind **kein Entscheidungsverfahren** für Allgemeingültigkeit.

Siehe **Unentscheidbarkeit** in Satz 6.11.

Da das Verfahren korrekt und vollständig ist, **terminiert es ggf. nicht**.

$D_{\mathcal{H}(S)}$ kann unendlich sein: Funktionssymbole.

Heuristik zur Konstruktion endlicher Modelle:

Weiche Forderung **frisch** bei δ-Formeln auf.

- Erst existierende Konstanten verwenden.
- Falls diese Wahl zu Widersprüchen führt, führe neue Konstanten ein.
- Sonst Modell gefunden.

Beispiele zur Wiederverwendung von Konstanten

Gibt es Modelle für $\{\exists x.\ \neg p(x,x),\ \forall x.\exists y.\ p(x,y)\}$?

$$\exists x\ \neg p(x,x)$$
$$\forall x \exists y\ p(x,y)$$
$$\neg p(a,a)$$
$$\exists y\ p(a,y)$$
$$p(a,b)$$
$$\exists y\ p(b,y)$$
$$p(b,c)$$
$$\vdots$$

Beispiele zur Wiederverwendung von Konstanten (Fort.)

Verwende Konstante *a* wieder:

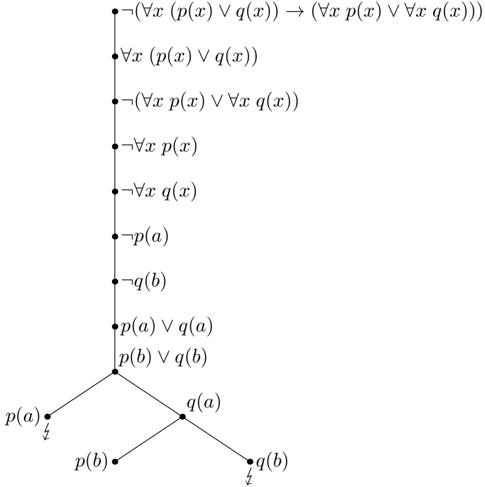
$$
\begin{array}{l}
\bullet\ \exists x\ \neg p(x,x) \\
\bullet\ \forall x \exists y\ p(x,y) \\
\bullet\ \neg p(a,a) \\
\bullet\ \exists y\ p(a,y) \\
\bullet\ p(a,b) \\
\bullet\ \exists y\ p(b,y) \\
\bullet\ p(b,a)
\end{array}
$$

Es gibt also eine Struktur mit zwei Elementen $\{a, b\}$, die Modell ist.
Interpretation des Prädikats:

$p(x,y)$	a	b
a	0	1
b	1	$*$

Beispiele zur Wiederverwendung von Konstanten (Fort.)

Gilt $\models \forall x.\ (p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall x.\ p(x) \vee \forall x.\ q(x))$?



$$\mathcal{M} = (\{a, b\}, \quad I(p)(a) = I(q)(b) = 0, \quad I(p)(b) = I(q)(a) = 1)$$

Idee prädikatenlogischer Resolution

Ziel: **Praktisches** Semi-Entscheidungsverfahren für Unerfüllbarkeit basierend auf dem Algorithmus von Gilmore:

Um Unerfüllbarkeit von $A \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n . B \in FO(S)$ in Skolemform zu zeigen, zeige Unerfüllbarkeit der Herbrand-Expansion $E(A)$.

Beispiel: Sei $A \equiv \forall x . p(x) \wedge \neg p(f(x))$ über $S = (\{a/_0, f/_1\}, \{p/_1\})$. Dann

$$E(A) = \{p(a) \wedge \neg p(f(a)), p(f(a)) \wedge \neg p(f(f(a))), \ldots\}.$$

Kernbeobachtung: Da $A \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n . B$ mit B in **KNF**, lässt sich Unerfüllbarkeit von $E(A)$ mittels **aussagenlogischer Resolution** prüfen:

$$\begin{array}{cccc} \{p(a)\} & \{\neg p(f(a))\} & \{p(f(a))\} & \{\neg p(f(f(a)))\} \\ & \searrow & \swarrow & \\ & & \sqcup & \end{array}$$

Idee prädikatenlogischer Resolution (Fort.)

Beobachtung: Bereits die Substitutionen $\{x/a\}$ und $\{x/f(a)\}$ liefern unerfüllbare Formelmenge.

Es werden aber schon zwei Klauseln generiert, die für die Herleitung der leeren Klausel $\sqcup$ **nicht benötigt werden**.

Idee: Generiere geeignete Substitution für jede Klausel in B — **individuell**.

Wende die Substitution nur auf diese Klausel an, nicht auf ganz B.

Am Beispiel:

Klauseln in B	$\{p(x)\}$	$\{\neg p(f(x))\}$
Grundsubstitutionen	$\downarrow \{x/f(a)\}$	$\downarrow \{x/a\}$
Entsprechende Grundinstanzen der Klauseln in B	$\{p(f(a))\}$	$\{\neg p(f(a))\}$

$$\{p(f(a))\} \searrow \quad \swarrow \{\neg p(f(a))\}$$
$$\sqcup$$

Idee prädikatenlogischer Resolution (Fort.)

Problem: Algorithmische Suche nach Grundinstanzen zur Herleitung der leeren Klausel $\sqcup$.

- Systematisches Probieren der Grundsubstitutionen — aufwendig.
- Vorausschauende Entscheidung für Grundsubstitutionen, damit später benötigte Resolutionen möglich — schwierig.

Ansatz: Führe Substitutionen zurückhaltend aus — nur sofern sie für den nächsten Resolutionsschritt notwendig sind.

Am Beispiel:

$$\begin{array}{ccc}
\{p(x), \neg q(g(x))\} & & \{\neg p(f(y))\} \\
\searrow & & \swarrow \{x/f(y)\} \\
& \{\neg q(g(f(y)))\} &
\end{array}$$

Idee prädikatenlogischer Resolution (Fort.)

Am Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} \{p(x), \neg q(g(x))\} & & \{\neg p(f(y))\} \\ & \searrow \qquad\qquad \swarrow \{x/f(y)\} & \\ & \{\neg q(g(f(y)))\} & \end{array}$$

Was passiert?

Erzeuge prädikatenlogische Resolvente aus prädikatenlogischen Klauseln.

Resolutionsschritt kommt mit Substitution, die Literale in Ausgangsklauseln komplementär macht.

Führe Substitutionen zurückhaltend aus, kein Anlass für Grundsubstitutionen.

Unifikation

Ziel: Berechne Unifikator — eine Substitution, die eine Menge von Literalen identisch macht.

Am Beispiel: Für $\{p(x), p(f(y))\}$ sind

$$\Theta_1 = \{x/f(y)\} \quad \text{und} \quad \Theta_2 = \{x/f(a), y/a\}$$

Unifikatoren. Aber Θ_2 substituiert mehr als notwendig.

Definition 6.19 (Unifikator)

Eine Substitution $\Theta : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{t_1, \ldots, t_n\}$ ist **Unifikator einer Menge von Literalen** $\{L_1, \ldots, L_n\}$, falls

$$L_1\Theta \equiv \ldots \equiv L_n\Theta.$$

Existiert Θ, heißt die Literalmenge **unifizierbar**.

Unifikation (Fort.)

Definition 6.19 (Unifikator (Fort.))

Ein Unifikator Θ von $\{L_1, \ldots, L_n\}$ heißt **allgemeinster Unifikator**, falls für jeden Unifikator Θ' von $\{L_1, \ldots, L_n\}$ eine Substitution $\tilde{\Theta}$ existiert, so dass

$$\Theta' = \Theta\tilde{\Theta}.$$

Anschaulich gilt mit einem allgemeinsten Unifikator:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Theta} & A\Theta \\ & {}_{\Theta'} \searrow & \downarrow \tilde{\Theta} \\ & & A\Theta' \equiv A\Theta\tilde{\Theta} \end{array}$$

für jede Formel $A \in FO(S)$.

Satz 6.20 (Unifikation, Robinson)

Jede unifizierbare Menge von Literalen besitzt einen allgemeinsten Unifikator.

Unifikationsalgorithmus

Input: $\{L_1, \ldots, L_n\}$.

$\Theta := \{\}$
while $\exists i, j : L_i\Theta \not\equiv L_j\Theta$ **do**
  Durchsuche Literale $L_1\Theta, \ldots, L_n\Theta$ von links nach rechts,
  bis erste Position gefunden, an der $L_k\Theta \not\equiv L_m\Theta$.
  if keines der Zeichen Variable **then**
    return nicht unifizierbar
  end if
  let $x =$ die Variable
  let $t =$ der Term in dem anderen Literal
  if $x \in V(t)$ **then** //Occur-Check
    return nicht unifizierbar
  end if
  $\Theta := \Theta\{x/t\}$
end while
return Θ

Bei positiver Terminierung ist Θ ein allgemeinster Unifikator.

Resolution

Definition 6.21 (Resolvente)

Seien K_1, K_2 prädikatenlogische Klauseln mit disjunkten Variablen. Falls es Literale $L_1, \ldots, L_m \in K_1$ und $L'_1, \ldots, L'_n \in K_2$ gibt, so dass

$$\{\overline{L_1}, \ldots, \overline{L_m}, L'_1, \ldots, L'_n\}$$

unifizierbar ist mit allgemeinstem Unifikator Θ, dann heißt

$$R := \big((K_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup (K_2 \setminus \{L'_1, \ldots, L'_n\})\big)\Theta$$

prädikatenlogische Resolvente von K_1 und K_2.

Notation: $K_1, K_2 \underset{Res}{\vdash} R$ oder

$$\begin{array}{ccc} K_1 & & K_2 \\ & \searrow \quad \swarrow \Theta & \\ & R & \end{array}$$

Bemerkung: Aussagenlogische Resolution ist ein Spezialfall mit $m = n = 1$ und $\Theta = \{\}$.

Resolution (Fort.)

Am Beispiel:

$$
\begin{array}{ccc}
\{p(f(x)), \neg q(z), p(z)\} & & \{\neg p(y), r(g(y), a)\} \\
\searrow & & \swarrow \; \Theta = \{z/f(x), y/f(x)\} \\
& \{\neg q(f(x)), r(g(f(x)), a)\} &
\end{array}
$$

Satz 6.22 (Korrektheit und Widerlegungsvollständigkeit, Robinson)

Sei $A \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n . B \in FO(S)$ *abgeschlossen und in Skolemform mit* B *in* KNF. *Dann ist* A *unerfüllbar gdw.* $B \underset{Res}{\vdash} \sqcup$.

Beachte: Das Verfahren muss nicht terminieren.
Unerfüllbarkeit ist unentscheidbar.

Zum Beweis der Widerlegungsvollständigkeit

Beweisansatz: Reduziere prädikatenlogische Resolution auf (aussagenlogische) Grundresolution (oben vorgestellt).

Technik: Aussagenlogische Resolutionen von Grundinstanzen können geliftet werden in prädikatenlogische Resolutionen:

Falls
$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[d] & & K_2 \arrow[d] \\ K_1' \arrow[dr] & & K_2' \arrow[dl] \\ & R' & \end{tikzcd}$$
, dann
$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[dr] & & K_2 \arrow[dl] \\ & R \arrow[d] & \\ & R' & \end{tikzcd}$$

Lemma 6.23 (Lifting-Lemma)

Seien K_1, K_2 prädikatenlogische Klauseln und K_1', K_2' Grundinstanzen mit aussagenlogischer Resolvente R'.
Dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R aus K_1, K_2, so dass R' Grundinstanz von R ist.