Kapitel II

Prädikatenlogik

Grundlagen der Prädikatenlogik

Ziele:

- Formulierung von Aussagen über einen Datenbereich, auf dem Funktionen und Prädikate definiert sind
- Beweise für diese Aussagen

Anwendungen:

- Lösung von Anfragen auf Datenmengen in der KI oder in Informationssystemen
- Formulierung von Integritätsbedingungen auf Daten: Schleifeninvarianten eines Programms, Constraints auf XML-Dateien oder Datenbankeinträgen
- Lösung von Constraint-Systemen beim Testen oder Planen
- Logisches Programmieren

Syntax der Prädikatenlogik 1879 im Artikel Begriffsschrift von Gottlob Frege (1848 — 1925).

Semantik erst 1934 durch Alfred Tarski (1901 — 1983).

Grundlagen der Prädikatenlogik (Fort.)

Semantisch: Elemente eines Datenbereich, Funktionen auf diesen Elementen und Beziehungen zwischen diesen Elementen

Syntaktisch:

- Terme beschreiben Elemente des Datenbereichs
  Konstanten bezeichnen einzelne Elemente (z.B. 7)
  Variablen stehen für Elemente (z.B. x)
  Funktionssymbole erlauben es Terme zu konstruieren, die wiederum für Elemente stehen (z.B. $fac(7)$)
- Formeln formulieren Aussagen über die Elemente: wahr oder falsch.
  Prädikatssymbole drücken elementare Aussagen aus (z.B. $x > 7$)
  Logische Operatoren/Junktoren und Quantoren verknüpfen die elementaren Aussagen (z.B. $\forall x.\ x > 7 \vee x < 8$)

Funktions- und Prädikatssymbole **hängen von der Anwendung ab**, sind also Parameter in der Definition der Syntax.

Logische Symbole sind **fest**.

Grundlagen der Prädikatenlogik (Fort.)

Beispiel 4.1 (Beschreibung mathematischer Beziehungen)

Syntax: Konstanten 1, 2, 3, Funktionssymbole $+$, $/$, Variablen x, y, z, Pädikat $<$, Junktoren $\rightarrow$, $\wedge$, Quantoren $\forall$, $\exists$

$$\begin{aligned} \text{Terme:} \quad & 1,\ 1 + \frac{2}{3},\ x + \frac{3}{2} \\ \text{Formeln:} \quad & x < 3,\ \forall x. \forall y. (x < y \rightarrow \exists z. (x < z \wedge z < y)) \end{aligned}$$

Semantik: Datenbereich $\mathbb{Q}$, Konstante 1 bis Prädikat $<$ mit der "üblichen" Bedeutung

Grundlagen der Prädikatenlogik (Fort.)

Beispiel 4.2 (Beschreibung von Beziehungen zwischen Daten)

Syntax: Variablen x, y, Funktion $\mathit{weiteDerReise}(-)$, Pädikate $\mathit{istHund}(-)$, $\mathit{istFisch}(-)$, $<$, Quantor $\forall$.

Formel:

$$\forall x.\forall y.(\mathit{istHund}(x) \land \mathit{istFisch}(y)) \rightarrow \mathit{weiteDerReise}(x) < \mathit{weiteDerReise}(y)$$

Semantik: Datenbereich $\{\mathit{Lassie}, \mathit{Nemo}\} \cup \mathbb{N} \cup \{\bot\}$.

Funktion $\mathit{weiteDerReise}(x)$ liefert die Weite der Reise eines Tieres des Datenbereichs und $\bot$, falls kein Tier eingegeben wird.

Prädikat $x < y$ liefert wahr, falls x und y in $\mathbb{N}$ und x kleiner als y, falsch sonst.

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe

Definition 4.3 (Signatur)

Eine Signatur ist ein Paar $S = (Funk, Präd)$ mit

- *Funk* einer Menge von Funktionssymbolen $f, g, \ldots \in Funk$ und
- *Präd* einer Menge von Prädikatssymbolen $p, q, \ldots \in Präd$.

Jedes Funktions- und jedes Prädikatssymbol hat eine Stelligkeit $k \in \mathbb{N}$.
Schreibe auch $f/_k \in Funk$ bzw. $p/_k \in Präd$, falls f bzw. p Stelligkeit k hat.
0-stellige Funktionen und Prädikate heißen Konstanten.

Voraussetzungen:

- *Funk* und *Präd* seien entscheidbar, nicht notwendigerweise endlich.
- Neben der Signatur gebe es eine abzählbare Menge V an Variablen.
  Es seien V, *Funk*, *Präd* paarweise disjunkt und enthalten nicht

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow \quad \exists \quad \forall \quad , \quad = \quad (\quad)$$

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Definition 4.4 (Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe)

Sei $S = (Funk, Präd)$ eine Signatur.
Die Menge $Term(S)$ aller Terme über S ist induktiv definiert als

$$t ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_k), \quad \text{wobei } x \in V \text{ und } f/_k \in Funk.$$

Die Menge $FO(S)$ der prädikatenlogischen Formeln erster Stufe über S ist induktiv definiert als

$$\begin{aligned} A ::= {} & (t_1 = t_2) \mid p(t_1, \ldots, t_k) \mid \\ & (\neg A) \mid (A_1 \wedge A_2) \mid (A_1 \vee A_2) \mid (A_1 \rightarrow A_2) \mid (A_1 \leftrightarrow A_2) \mid \\ & (\exists x.\, A) \mid (\forall x.\, A) \end{aligned}$$

mit $t_1, t_2, \ldots, t_k \in Term(S)$, $p/_k \in Präd$ und $x \in V$.

Nenne $(t_1 = t_2)$ und $p(t_1, \ldots, t_k)$ auch atomare Formeln.

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Zur besseren **Lesbarkeit**:

- Äußere Klammern weglassen.
- **Prioritäten**: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall$
- $(\forall x_1, \ldots, x_n.\, A)$ steht für $(\forall x_1.(\ldots(\forall x_n.\, A)\ldots)$
  $(\exists x_1, \ldots, x_n.\, A)$ steht für $(\exists x_1.(\ldots(\exists x_n.\, A)\ldots)$
- Für zweistellige Prädikats- und Funktionssymbole wird auch Infix-Notation genutzt. Beispiel $t_1 < t_2$ statt $<(t_1, t_2)$.
- Weitere Klammern können weggelassen werden, wenn die Formelstruktur unmissverständlich bleibt, z.B.:
  $\exists x.\, \forall y.\, y < 2 \rightarrow y < x$

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Definition 4.5 (Freie und gebundene Variablen)

In einer Formel $(Qx.A)$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$ ist A der Geltungsbereich von Qx.

Ein Vorkommen einer Variablen $x \in V$ in einer Formel heißt gebunden, falls es im Geltungsbereich eines Quantors Qx vorkommt.

Sonstige Vorkommen einer Variablen heißen frei.

Formeln ohne freie Vorkommen heißen abgeschlossen.

Die Menge $V(A)$ enthält die Variablen in $A \in FO(S)$. Ähnlich enthalten $FV(A)$ und $GV(A)$ die Variablen, die gebunden bzw. frei in A vorkommen.

Lemma 4.6

(a) *Ist S entscheidbar, dann sind $Term(S)$ und $FO(S)$ entscheidbar.*

(b) *Zusammengesetzte Terme und Formeln lassen sich eindeutig zerlegen.*

(c) *Freie und gebundene Vorkommen lassen sich effektiv bestimmen.*

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Terme und Formeln sind zunächst einmal syntaktische Objekte ohne Bedeutung: Was bedeutet ein Term? Was bedeutet eine Formel?

Definition 4.7 (Struktur)

Sei $S = (Funk, Präd)$ eine Signatur. Eine Struktur der Signatur S, auch S-Struktur genannt, ist ein Paar $\mathcal{M} = (D, I)$ bestehend aus

- einer nicht-leeren Menge D, dem Datenbereich, und
- einer Interpretation I der Funktions- und Prädikatssymbole aus S. Dabei bildet I jedes $f/_k \in Funk$ auf eine k-stellige Funktion

$$I(f) : D^k \to D \qquad \text{(schreibe auch } f^{\mathcal{M}} \text{ statt } I(f))$$

und jedes $p/_k \in Präd$ auf ein k-stelliges Prädikat ab:

$$I(p) : D^k \to \mathbb{B} \qquad \text{(schreibe auch } p^{\mathcal{M}} \text{ statt } I(p)).$$

Beachte:

- Strukturen sind passend zu Signaturen gewählt.
- Gleichheit ist ein logisches Symbol, nicht Teil der Signatur. Es wird als Gleichheit auf dem Datenbereich interpretiert.

Definition 4.8 (Belegung)

Eine (Variablen-)Belegung in $\mathcal{M} = (D, I)$ ist eine Abbildung $\psi : V \to D$.

Die Modifikation $\psi\{x/d\}$ von ψ ist die Belegung mit

$$\psi\{x/d\}(y) := \begin{cases} d, & \text{falls } y = x \\ \psi(y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge aller Belegungen wird mit D^V bezeichnet.

Definition 4.9 (Semantik von Termen und Formeln)

Sei S eine Signatur, $\mathcal{M} = (D, I)$ eine S-Struktur und ψ eine Belegung. Dann ist die Semantik von Termen $t \in Term(S)$ und Formeln $A \in FO(S)$ durch die **Bewertung** $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M} : Term(S) \cup FO(S) \to D \cup \mathbb{B}$ wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(x) &= \psi(x) \\
\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(f(t_1, \ldots, t_k)) &= I(f)(\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(t_1), \ldots, \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(t_k)) \\
\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(t_1 = t_2) &= (\ \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(t_1) = \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(t_2)\ ) \\
\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(p(t_1, \ldots, t_k)) &= I(p)(\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(t_1), \ldots, \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(t_k)) \\
\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(\neg A) &= 1 - \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A) \\
\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A \vee B) &= max(\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A), \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(B))
\end{aligned}
$$

... für die anderen aussagenlogischen Operatoren entsprechend

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(\exists x.A) &= 1, \quad \text{gdw. es gibt } d \in D \text{ mit } \mathcal{B}_{\psi\{x/d\}}^\mathcal{M}(A) = 1 \\
\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(\forall x.A) &= 1, \quad \text{gdw. für alle } d \in D \text{ gilt } \mathcal{B}_{\psi\{x/d\}}^\mathcal{M}(A) = 1
\end{aligned}
$$

In der Definition der Semantik von Termen und Formeln ist

- $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(t)$ der Datenwert von t in $\mathcal{M}$ unter Belegung ψ und
- $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A)$ der Wahrheitswert von A in $\mathcal{M}$ unter Belegung ψ.

Lemma 4.10 (Koinzidenzlemma)

Sei $A \in FO(S)$, $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\psi, \varphi \in D^V$.

Falls $\psi(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in FV(A)$, dann gilt: $\quad \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A) = \mathcal{B}_\varphi^\mathcal{M}(A)$

Insbesondere ist die Semantik $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A)$ abgeschlossener Formeln $A \in FO(S)$ unabhängig von der Belegung $\psi \in D^V$:

entweder ist A unter allen Belegungen wahr oder unter keiner.

Definition 4.11 (Erfüllbarkeit, Tautologie)

Seien S eine Struktur, $A \in FO(S)$, $\Sigma \subseteq FO(S)$, $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\psi \in D^V$.

- A gilt in $\mathcal{M}$ unter ψ oder $\mathcal{M}$ und ψ erfüllen A, in Zeichen $\mathcal{M}, \psi \models A$, falls $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A) = 1$.
- Σ gilt in $\mathcal{M}$ unter ψ oder $\mathcal{M}$ und ψ erfüllen Σ, in Zeichen $\mathcal{M}, \psi \models \Sigma$, falls für alle $A \in \Sigma$ gilt $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A) = 1$.
- A gilt in $\mathcal{M}$ oder $\mathcal{M}$ ist ein Modell für A, in Zeichen $\mathcal{M} \models A$, falls $\mathcal{M}, \varphi \models A$ für alle Belegungen φ gilt.
- Σ gilt in $\mathcal{M}$ oder $\mathcal{M}$ ist ein Modell für Σ, in Zeichen $\mathcal{M} \models \Sigma$, falls $\mathcal{M}, \varphi \models \Sigma$ für alle Belegungen φ gilt.
- A ist eine Tautologie oder allgemeingültig, in Zeichen $\models A$, falls für alle S-Strukturen $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models A$.
- A ist erfüllbar, falls es eine S-Struktur $\mathcal{M}$ und eine Belegung $\psi \in D^V$ gibt mit $\mathcal{M}, \psi \models A$.
- Σ ist erfüllbar, falls es $\mathcal{M}$ und ψ gibt mit $\mathcal{M}, \psi \models \Sigma$.

Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit

Lemma 4.12

Formel $A \in FO(S)$ ist allgemeingültig gdw. $\neg A$ unerfüllbar ist.

Logische Folgerung und Äquivalenz

Definition 4.13 (Logische Folgerung und Äquivalenz)

Seien $A, B \in FO(S)$ und $\Sigma, \Gamma \subseteq FO(S)$;

- A ist logische Folgerung von Σ, in Zeichen $\Sigma \models A$, wenn jede S-Struktur $\mathcal{M}$ und Belegung ψ, die alle Formeln in Σ erfüllen, auch A erfüllen.
- $\mathrm{Folg}(\Sigma) := \{A \in FO(S) \mid \Sigma \models A\}$ bezeichnet die Menge der Folgerungen aus Σ.
- A und B heißen logisch äquivalent, in Zeichen $A \models\!\!\!=\!\!\!| B$, falls $A \models B$ und $B \models A$ gelten.
- Σ und Γ heißen logisch äquivalent, in Zeichen $\Sigma \models\!\!\!=\!\!\!| \Gamma$, falls $\Sigma \models A$ für alle $A \in \Gamma$ *und* $\Gamma \models B$ für alle $B \in \Sigma$.

Lemma 4.14 (Logische Äquivalenzen)

Seien $A, B \in FO(S)$. Dann gilt:

$$\neg\forall x.A \models\mid \exists x.\neg A \qquad \neg\exists x.A \models\mid \forall x.\neg A \tag{8}$$

$$(\forall x.A) \wedge (\forall x.B) \models\mid \forall x.(A \wedge B) \qquad (\exists x.A) \vee (\exists x.B) \models\mid \exists x.(A \vee B) \tag{9}$$

$$\forall x.\forall y.A \models\mid \forall y.\forall x.A \qquad \exists x.\exists y.A \models\mid \exists y.\exists x.A \tag{10}$$

Falls außerdem $x \notin FV(B)$, gilt

$$Qx.A \ op\ B \models\mid Qx.(A \ op\ B) \text{ mit } Q \in \{\forall, \exists\} \text{ und } op \in \{\wedge, \vee\}. \tag{11}$$

Bemerkung: Äquivalenzen (8), (9) und (11) ziehen Quantoren nach außen.

Bei der Verwendung logischer Äquivalenzen ist Vorsicht geboten:

$$(\forall x.A) \vee (\forall x.B) \not\models\mid \forall x.(A \vee B) \qquad (\exists x.A) \wedge (\exists x.B) \not\models\mid \exists x.(A \wedge B)$$

Lemma 4.15

Logische Äquivalenz ist eine Kongruenz: ersetzt man in einer Formel $A \in FO(S)$ eine Teilformel B durch C mit $C \models\!\!\!\!=\!\!\!|\, B$, dann erhält man A' mit $A' \models\!\!\!\!=\!\!\!|\, A$.

Bemerkung 4.16

(a) $\Sigma \models A$ *gdw.* $\Sigma \cup \{\neg A\}$ *nicht erfüllbar.*

(b) $\emptyset \models A$ *gdw.* $\models A$, *also* A *ist allgemeingültig.*

(c) Σ *nicht erfüllbar* *gdw.* $\Sigma \models A$ *für alle* $A \in FO(S)$.

(d) *Falls* $\Gamma \subseteq \Sigma$ *und* $\Gamma \models A$, *dann* $\Sigma \models A$.

(e) *Falls* $\Gamma \models\!\!\!\!=\!\!\!|\, \Sigma$, *dann ist* Γ *erfüllbar gdw.* Σ *erfüllbar ist.*

(f) *Falls* $\Gamma \models\!\!\!\!=\!\!\!|\, \Sigma$, *dann* $Folg(\Gamma) = Folg(\Sigma)$.

(g) $A \models\!\!\!\!=\!\!\!|\, B$ *gdw.* $A \models B$ *und* $B \models A$ *gdw.* $\models A \leftrightarrow B$ *gdw.* $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A) = \mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(B)$ *für alle* $\mathcal{M}$, ψ.

(h) *Falls* $A \models\!\!\!\!=\!\!\!|\, B$, *dann* $\Sigma \models A$ *gdw.* $\Sigma \models B$.

Beispiele

Beispiel 4.17

i) $\forall x.A \models A$
(Spezialfall von $(\forall x.A) \rightarrow A\{x/t\}$ allgemeingültig, s.u.)

ii) Im Allgemeinen gilt nicht $A \models \forall y.A$ mit $y \in FV(A)$.

Sei $A \equiv p(y)$ und $\mathcal{M} = (\{0,1\}, I)$ mit $I(p)(a) = 1$ gdw.$a = 0$.
Wähle $\psi(y) = 0$, dann $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(A) = 1$.
Aber $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(\forall y.A) = 0$ mit $\psi\{y/1\}$.

iii) $\models \exists x.(p(x) \rightarrow \forall x.p(x))$
Sei $\mathcal{M} = (D, I)$. Es gilt $\mathcal{B}_\psi^\mathcal{M}(\exists x.(p(x) \rightarrow \forall x.p(x))) = 1$, da einer der beiden folgenden Fälle gilt:

es gibt $d \in D$ mit $I(p)(d) = 0$ oder
für alle $d \in D$ gilt $I(p)(d) = 1$.

iv) $\forall x.(A \rightarrow B) \models \forall x.A \rightarrow \forall x.B$

Satz 4.18 (Wichtige semantische Eigenschaften/Sätze)

Seien $\Gamma \subseteq FO(S)$ *und* $A, B \in FO(S)$.

Deduktionstheorem $\Gamma, A \models B$ *gdw.* $\Gamma \models A \to B$

Modus-Ponens-Regel $\Gamma \models A$ *und* $\Gamma \models A \to B$, *dann* $\Gamma \models B$

Kontrapositionsregel $\Gamma, A \models \neg B$ *gdw.* $\Gamma, B \models \neg A$

Generalisierungstheorem

Kommt $x \in V$ *in keiner Formel von* Γ *frei vor, dann*

$\Gamma \models A$ *gdw.* $\Gamma \models \forall x.\ A$

Insbesondere: $A \models \forall x.\ A$ *bzw.* $\models A \to \forall x.\ A$,

falls x *nicht frei in* A *vorkommt.*

Beispiel 4.19 (Anwendung der Sätze)

a) $\models \exists x.\forall y.A \to \forall y.\exists x.A$

gdw.	$\exists x.\forall y.A \models \forall y.\exists x.A$	Deduktionstheorem
gdw.	$\exists x.\forall y.A \models \exists x.A$	Generalisierungstheorem
gdw.	$\neg\forall x.\neg\forall y.A \models \neg\forall x.\neg A$	Lemma 4.14
gdw.	$\forall x.\neg A \models \forall x.\neg\forall y.A$	Kontrapositionsregel
gdw.	$\forall x.\neg A \models \neg\forall y.A$	Generalisierungstheorem
gdw.	$\{\forall x.\neg A, \forall y.A\}$	nicht erfüllbar ist

b) Variante von Kongruenz

A' entstehe aus A durch erlaubte (beachte Quantoren) Ersetzung einiger Vorkommen von x durch y. Dann gilt

$$\models \forall x.\forall y.(x = y \to (A \leftrightarrow A'))$$

Beispiel: $\forall x.\forall y.(x = y \to (f(x,y) = g(x) \leftrightarrow f(y,y) = g(x))$

Substitution

Substitutionen ersetzen Variablen durch Terme.

Sie sind ein syntaktische Gegenstück zum semantischen Konzept der Modifikation von Belegungen.

Definition 4.20 (Substitution)

Eine Substitution der Signatur S ist eine Abbildung

$$\theta : V \to Term(S).$$

Im Folgenden gehen wir davon, dass nur für endlich viele $x \in V$ gilt $\theta(x) \neq x$. Dann lassen sich Substitutionen direkt angeben als
$\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$
und wir definieren:
$Dom(\theta) = \{x_1 \ldots, x_n\}$ $\quad\quad Ran(\theta) = \{t_1, \ldots, t_n\}$

Substitution (Fort.)

Substitutionen lassen sich auf Terme und Formeln anwenden.

Definition 4.21 (Anwendung von Substitutionen)

Die Anwendung von θ auf $t \in Term(S)$ liefert einen neuen Term $t\theta \in Term(S)$, der induktiv wie folgt definiert ist:

$$x\theta := \theta(x) \qquad f(t_1, \ldots, t_n)\theta := f(t_1\theta, \ldots, t_n\theta).$$

Die Anwendung von θ auf Formeln $A \in FO(S)$ liefert eine neue Formel $A\theta \in FO(S)$, die induktive wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} (t_1 = t_2)\theta &:= t_1\theta = t_2\theta & (\neg A)\theta &:= \neg(A\theta) \\ p(t_1, \ldots, t_n)\theta &:= p(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (A \text{ op } B)\theta &:= A\theta \text{ op } B\theta \\ & & (Qx.A)\theta &:= Qy.(A\{x/y\}\theta), \end{aligned}$$

wobei $y \notin V(A) \cup Dom(\theta) \cup V(Ran(\theta))$.

Substitution (Fort.)

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen und der Modifikation von Belegungen ist wie folgt:

Lemma 4.22 (Substitutionslemma)

$\mathcal{B}_{\psi}^{\mathcal{M}}(A\{x/t\}) = \mathcal{B}_{\varphi}^{\mathcal{M}}(A) \quad \textit{mit } \varphi := \psi\{x/\mathcal{B}_{\psi}^{\mathcal{M}}(t)\}$.

Der Beweis wird mittels Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln geführt.

Korollar 4.23

i) *Ist* $A \in FO(S)$ *allgemeingültig, dann auch* $A\{x/t\}$.

ii) *Die Formel* $(\forall x.A) \rightarrow A\{x/t\}$ *ist allgemeingültig.*

Substitution (Fort.)

Ähnlich zum Substitutionslemma erhält man:

Lemma 4.24 (Gebundene Umbenennung erhält logische Äquivalenz)

$Qx.A \models\!\!\!\models Qy.(A\{x/y\})$, *wenn* $y \notin FV(A)$.

Bemerkung: Gebundene Umbenennung kann die Vorkommen von gebundenen Variablen in einer Formel eindeutig machen.

Normalformen

Erzeuge Formeln von einfacherer Gestalt, für die sich Aussagen eher zeigen und effizientere Algorithmen entwerfen lassen.

Pränexnormalform: Alle Quantoren außen (PNF ist logisch äquivalent).

Skolemform: Pränexnormalform und außerdem nur Allquantoren (SNF ist erfüllbarkeitsäquivalent).

Lemma 4.25 (Existentieller und universeller Abschluss)

Betrachte $A \in FO(S)$ mit $FV(A) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} A \textit{ ist allgemeingültig} & \textit{gdw.} & \forall x_1 \ldots \forall x_n.A \textit{ ist allgemeingültig} \\ A \textit{ ist erfüllbar} & \textit{gdw.} & \exists x_1 \ldots \exists x_n.A \textit{ ist erfüllbar.} \end{array}$$

Formel $\forall x_1 \ldots \forall x_n.A$ ist der universelle Abschluss von A.
Formel $\exists x_1 \ldots \exists x_n.A$ ist der existentielle Abschluss von A.

Normalformen (Fort.)

Eine Formel $A \in FO(S)$ heißt bereinigt, falls

i) keine Variable frei und gebunden vorkommt und

ii) jede Variable höchstens einmal gebunden wird.

Durch wiederholte Anwendung gebundener Umbenennung in Lemma 4.24 kann man jede Formel bereinigen.

Lemma 4.26

Zu jeder Formel $A \in FO(S)$ gibt es eine bereinigte Formel $B \in FO(S)$ mit $A \models\!\!\!\!=\!\!\!\!| B$.

Normalformen (Fort.)

Nächster Schritt: Ziehe Quantoren nach außen unter Ausnutzung von Lemma 4.14.

Definition 4.27

Eine Formel der Gestalt $A \equiv Q_1 y_1 \dots Q_n y_n.B$ mit $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ ist in Pränexnormalform, wenn B quantorenfrei ist.

$A \in FO(S)$ ist in BPF, falls A bereinigt und in Pränexnormalform ist.

Satz 4.28

Zu jeder Formel $A \in FO(S)$ gibt es eine Formel $B \in FO(S)$ in BPF mit $A \models\!\!\!\!\!= \!\!\!\mid B$.

Hinter dem Beweis verbirgt sich ein rekursiver Algorithmus.
Es dient dem Verständnis, dieses Verfahren selbst herauszuarbeiten.

Normalformen (Fort.)

Weiterer Schritt: Eliminiere Existenzquantoren.

Trick: Ersetze bei Sequenzen von Quantoren der Form für alle $y_1 \ldots y_n$ gibt es ein z die Variable z durch einen "neuen" Term $f(y_1, \ldots, y_n)$:

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists z.A \quad \text{geht über nach} \quad \forall y_1 \ldots \forall y_n.(A\{z/f(y_1, \ldots, y_n)\}) .$$

Dabei ist $f/_n$ ein frisches Funktionssymbol aus der Menge *Sko* der Skolemsymbole. Frisch heißt, *Sko* ist disjunkt von S und $f/_n$ kommt nicht in A vor.

Die Einführung von Skolemfunktionen für existenzquantifizierte Variablen wird Skolemisierung genannt.

Skolemisierung erhält nur Erfüllbarkeitsäquivalenz, logische Äquivalenz muss aufgegeben werden.

Skolemisierung geht zurück auf Thoralf Albert Skolem (1887 – 1963).

Normalformen (Fort.)

Definition 4.29 (Skolemformel)

Für eine Formel $A \in FO(S)$ in BPF lassen sich Skolemformeln $B \in FO(S \uplus Sko)$ (wieder in BPF) durch folgendes Verfahren konstruieren:

while A hat Existenzquantoren **do**
  Sei $A \equiv \forall y_1 \dots \forall y_n \exists z.B$ mit B in BPF
  Sei $f/n \in Sko$ ein Skolemsymbol, das nicht in B vorkommt
  Setze $A \equiv \forall y_1 \dots \forall y_n (B\{z/f(y_1, \dots, y_n)\})$
end while

Beachte: Die Skolemisierung arbeitet von außen nach innen.

Satz 4.30 (Skolem)

Für jede Formel $A \in FO(S)$ in BPF und zugehöriger Skolemformel $B \in FO(S \uplus Sko)$ gilt:

$$A \text{ ist erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad B \text{ ist erfüllbar.}$$

Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe

Satz 4.31 (Kompaktheitssatz)

Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq FO(S)$ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

Beweis benötigt Ergebnisse, die wir im Abschnitt "Algorithmische Verfahren für die Prädikatenlogik" erarbeiten, und wird deshalb dort präsentiert.