Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$

Frage: Lassen sich alle Tautologien als Theoreme in System $\mathcal{F}_0$ herleiten?

Satz 2.14 (Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$)

Sei $A \in F_0$ eine Formel der Aussagenlogik.

a) Korrektheit: Gilt $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$, dann auch $\models A$
d.h. jedes Theorem in $T(\mathcal{F}_0)$ ist eine Tautologie.

b) Vollständigkeit: Gilt $\models A$, dann auch $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$
d.h. alle Tautologien lassen sich in $\mathcal{F}_0$ herleiten.

Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$ (Fort.)

Als Hilfsmittel dient:

Lemma 2.15

Seien $A \in F_0$ und $p_1, \ldots, p_n$, $n > 0$, die in A vorkommenden Aussagevariablen. Sei ψ eine Belegung. Mit

$$P_i := \begin{cases} p_i, & \text{falls } \mathcal{B}_\psi(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \text{falls } \mathcal{B}_\psi(p_i) = 0 \end{cases} \qquad A' := \begin{cases} A, & \text{falls } \mathcal{B}_\psi(A) = 1 \\ \neg A, & \text{falls } \mathcal{B}_\psi(A) = 0 \end{cases}$$

gilt $P_1, \ldots, P_n \vdash A'$.

Folgerung

Folgerung 2.16

Sei $\Sigma \subseteq F_0, A \in F_0$.

- $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ *gilt genau dann, wenn* $\Sigma \models A$ *gilt.*
- Σ *ist genau dann konsistent, wenn* Σ *erfüllbar ist.*
- *Ist* Σ *endlich und* $A \in F_0$, *dann ist* $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ *entscheidbar.*

Beweis der Folgerung

Beweis:

1. Aussage:

$$
\begin{aligned}
& \Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A \\
\overset{2.8}{\iff} \; & \text{Es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \text{ mit } A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{F}_0} A \\
\overset{\text{D.T.}}{\iff} \; & \text{Es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \text{ mit} \\
& \quad \vdash_{\mathcal{F}_0} (A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to A) \ldots)) \\
\overset{2.14}{\iff} \; & \text{Es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \text{ mit} \\
& \quad \models (A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to A) \ldots)) \\
\overset{\text{D.T.}}{\iff} \; & \text{Es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \text{ mit } A_1, \ldots, A_n \models A \\
\overset{\text{K.S.}}{\iff} \; & \Sigma \models A
\end{aligned}
$$

■

Beweis der Folgerung (Fort.)

Beweis:

2. Aussage:

$$\begin{aligned} & \Sigma \text{ ist konsistent} \\ \iff & \text{Es gibt kein } A \text{ mit } \Sigma \vdash A \text{ und } \Sigma \vdash \neg A \\ \iff & \text{Es gibt kein } A \text{ mit } \Sigma \models A \text{ und } \Sigma \models \neg A \\ \iff & \Sigma \text{ ist erfüllbar (Lemma 1.11(c)).} \end{aligned}$$

3. Aussage:

Sei also Σ endlich:

$$\begin{aligned} & \Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A \text{ ist entscheidbar} \\ \iff & \Sigma \models A \text{ ist entscheidbar} \\ \iff & \text{Die endlich vielen Belegungen, die } \Sigma \text{ erfüllen, lassen sich berechnen} \\ & \text{und für jede lässt sich prüfen, ob sie } A \text{ erfüllt} \end{aligned}$$

Sequenzenkalkül

Es gibt weitere korrekte und vollständige deduktive Systeme für die Aussagenlogik. Das folgende System geht auf Gerhard Gentzen (1909–1945) zurück. Es erleichtert das automatische Finden von Beweisen.

Definition 2.17 (Gentzen-Sequenzenkalkül)

Seien $\Gamma, \Delta \subseteq F$ endliche Mengen von Formeln.
Eine Sequenz ist eine Zeichenreihe der Form $\Gamma \vdash_G \Delta$.
Die Menge der Sequenzen bezeichnen wir mit F_G.

Wir betrachten die Sequenzen als spezielle Form von Formeln.

Semantische Interpretation von Sequenzen:
Eine Sequenz $\Gamma \vdash_G \Delta$ mit $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\Delta = \{B_1, \ldots, B_m\}$ ist allgemeingültig, wenn für jede Belegung ψ gilt:
es gibt ein $A_i \in \Gamma$ mit $\mathcal{B}_\psi(A_i) = 0$ oder ein $B_j \in \Delta$ mit $\mathcal{B}_\psi(B_j) = 1$.

Semantisch entspricht $\Gamma \vdash_G \Delta$ also der Formel

$$(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \cdots \vee B_m).$$

Sequenzenkalkül (Fort.)

Definition 2.17 (Gentzen-Sequenzenkalkül (Fort.))

Die folgenden Schemata definieren die Axiome des Sequenzenkalküls:

(Ax1) $\Gamma, A \vdash_G A, \Delta$ (Ax2) $\Gamma, A, \neg A \vdash_G \Delta$ (Ax3) $\Gamma \vdash_G A, \neg A, \Delta$

Die folgenden Schemata definieren die Regeln des Sequenzenkalküls:

$\mathbf{R}_{\wedge,\vee}$: $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash_G \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, B, \Delta}{\Gamma \vdash_G A \vee B, \Delta}$

$\mathbf{R}_{\rightarrow}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta, B}{\Gamma \vdash_G A \rightarrow B, \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta\,; \quad \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash_G \Delta}$

$\mathbf{R}_{\neg}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta}{\Gamma \vdash_G \neg A, \Delta}$ $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash_G \Delta}$

$\mathbf{R}_{\wedge'}$: $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta\,; \quad \Gamma \vdash_G B, \Delta}{\Gamma \vdash_G A \wedge B, \Delta}$

$\mathbf{R}_{\vee'}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta\,; \quad \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash_G \Delta}$

Sequenzenkalkül (Fort.)

Eine Sequenz $\Gamma \vdash_G \Delta$ heißt herleitbar oder ableitbar , falls es eine endliche Folge von Sequenzen $\Gamma_1 \vdash_G \Delta_1, \ldots, \Gamma_r \vdash_G \Delta_r$ gibt mit $\Gamma_r \equiv \Gamma$, $\Delta_r \equiv \Delta$, so dass gilt:

> Jedes $\Gamma_j \vdash_G \Delta_j$ mit $1 \leq j \leq r$ ist ein Axiom oder geht aus vorangehenden Folgegliedern aufgrund einer Regel hervor.

Satz 2.18

Der Sequenzenkalkül ist

korrekt: Wenn $\Gamma \vdash_G \Delta$ herleitbar ist, gilt $\Gamma \models \Delta$.

vollständig: Wenn $\Gamma \models \Delta$ gilt, ist $\Gamma \vdash_G \Delta$ herleitbar.

Dabei ist $\Gamma \models \Delta$ definiert als $\Gamma \models \bigvee_{B \in \Delta} B$.

Beispiel

Beispiel 2.19

Es gilt $p \vee q, \neg p \vee r \vdash_G q \vee r$.

Beweis:

$q, \neg p \vee r \vdash q, r$	Ax1
$p, r \vdash q, r$	Ax1
$p, \neg p \vdash q, r$	Ax2
$p, \neg p \vee r \vdash q, r$	$R_{\vee'}$
$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q, r$	$R_{\vee'}$
$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r$	$R_{\vee}$

∎

Beweise im Sequenzenkalkül werden typischerweise aber nicht als eine Folge von Sequenzen angegeben, sondern bottom-up konstruiert und baumartig notiert (siehe Vorlesung).