## Satz 1.18 (Kompaktheitssatz der Aussagenlogik)

*$\Sigma \subseteq F$ ist erfüllbar genau dann, wenn jede* **endliche** *Teilmenge von $\Sigma$ erfüllbar ist.*
*$\Sigma \subseteq F$ ist unerfüllbar genau dann, wenn es eine unerfüllbare* **endliche** *Teilmenge von $\Sigma$ gibt.*

**Beweis:** (s. Vorlesung)

## Korollar 1.19

*Es gilt $\Sigma \models A$ genau dann, wenn es eine* **endliche** *Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ gibt mit $\Sigma_0 \models A$.*

- Der zweite Teil des Satzes ist die Grundlage für Beweisverfahren für $\Sigma \models A$. Dies ist der Fall, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist.
- Widerspruchbeweise versuchen systematisch eine **endliche** Menge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ zu finden, so dass $\Sigma_0 \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist.

# Anwendungen Kompaktheitssatz

## Beispiel 1.20

Sei $\Sigma \subseteq F$, so dass es zu jeder Belegung $\psi$ ein $A_\psi \in \Sigma$ mit $\mathcal{B}_\psi(A_\psi) = 1$ gibt. Dann gibt es $A_1, ..., A_n \in \Sigma$ $(n > 0)$ mit $\models A_1 \vee ... \vee A_n$.

Beweisskizze:
Betrachte die Menge $\Sigma' = \{\neg A \mid A \in \Sigma\}$.
$\Sigma'$ ist unerfüllbar.
(Sonst gäbe es ein $\psi$ mit $\mathcal{B}_\psi(\neg A) = 1$ für alle $A \in \Sigma$; nach Voraussetzung gibt es zu $\psi$ ein $A_\psi$ mit $\mathcal{B}_\psi(A_\psi) = 1$, im Widerspruch zu $\mathcal{B}_\psi(\neg A_\psi) = 1$.)
Nach dem Kompaktheitssatz gibt es eine endliche nichtleere Teilmenge $\{\neg A_1, ..., \neg A_n\}$ von $\Sigma'$, die unerfüllbar ist.
Also gibt es für jede Belegung $\psi$ ein $i$ mit $\mathcal{B}_\psi(\neg A_i) = 0$, also $\mathcal{B}_\psi(A_i) = 1$.
Also gilt für jede Belegung $\psi$: $\mathcal{B}_\psi(A_1 \vee ... \vee A_n) = 1$.

# Deduktive Systeme der Aussagenlogik

# Deduktive Systeme

Jede formale Logik baut auf einer formalen Sprache auf, deren Syntax und Semantik festgelegt ist. Die Semantik beschreibt insbesondere, unter welchen Bedingungen Aussagen/Formeln wahr sind.

Jede formale Logik besitzt darüber hinaus (mindestens) ein **deduktives System/Kalkül** bestehend aus Axiomen und Regeln, mit dem man wahre Aussagen/Formeln ableiten (formal beweisen) kann.

Man kann die Wahrheit von Formeln also auf zwei Arten "prüfen":

- Durch Anwendung der Semantik.
- Durch Ableiten mit dem deduktiven System.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit deduktiven Systemen/Kalkülen für die Aussagenlogik.

Eine Formel wird Theorem der Logik genannt, wenn sie mit dem deduktiven System abgeleitet werden kann.

Man kann deduktive Systeme angeben, in denen Formeln genau dann Theoreme sind, wenn sie auch Tautologien sind.

# Deduktive Systeme

**Definition 2.1 (Deduktives System)**

Sei $F$ eine Menge von Formeln. Ein **deduktives System** $\mathcal{F}$ besteht aus

- einer Menge von Axiomen $\mathrm{Ax} \subseteq F$ und
- einer Menge $R$ von Regeln der Form $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ und $A_1, ..., A_n, A \in F$.

Die Mengen $F, \mathrm{Ax}$ und $R$ sind typischerweise **entscheidbar**.

# Deduktive Systeme (Fort.)

## Definition 2.2

Sei $\mathcal{F} = (Ax, R)$ ein deduktives System. Die Menge $T(\mathcal{F})$ der **Theoreme** von $\mathcal{F}$ ist induktiv definiert durch:

1. $\text{Ax} \subseteq T(\mathcal{F})$ alle Axiome sind Theoreme
2. Sind $A_1, \ldots, A_n \in T(\mathcal{F})$ und ist $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ in $R$, dann ist $A \in T(\mathcal{F})$.

Schreibe $A \in T(\mathcal{F})$ als $\vdash_{\mathcal{F}} A$ und sage $A$ ist in $\mathcal{F}$ herleitbar.

**Deduktiver Folgerungsbegriff:** Sei $\Sigma \subseteq F$, $A \in F$.
Dann ist $A$ in $\mathcal{F}$ aus $\Sigma$ herleitbar, kurz $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A$, falls $\vdash_{(Ax \cup \Sigma, R)} A$ gilt.

$$Folg_{\mathcal{F}}(\Sigma) := \{A \in F \mid \Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A\}.$$

# Deduktive Systeme (Fort.)

Gibt es ein deduktives System $\mathcal{F}_0$, so dass

$$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \quad \text{gdw.} \quad \models A?$$

**Bemerkung 2.3**

*Ist $\mathcal{F}$ aus dem Kontext klar, schreibt man abkürzend $\vdash A$ und $\Sigma \vdash A$*

**Definition 2.4**

$\Sigma$ heißt **konsistent**, falls für keine Formel $A \in F$ gibt: $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash \neg A$.
Andernfalls heißt $\Sigma$ **inkonsistent**.

# Beweise in der Logik

## Definition 2.5 (Beweis)

Eine endliche Folge von Formeln $B_1, \ldots, B_n$ mit $A \equiv B_n$, so dass für alle $B_i$ mit $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$B_i \in \text{Ax oder es gibt } i_1, \ldots, i_l < i \text{ und } \frac{B_{i_1} \ldots B_{i_l}}{B_i} \in R$$

heißt **Beweis** für $A$ in $\mathcal{F}$.

Eine Folge $B_1, \ldots, B_n$ heißt **Beweis** für $\Sigma \vdash A$ in $\mathcal{F}$, wenn $B_1, \ldots, B_n$ ein Beweis für $A$ in $(Ax \cup \Sigma, R)$ ist.

Sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Herleitbarkeitsaussagen der Form $A_1, \ldots, A_k \vdash A_0$. Die Elemente von $\mathcal{H}$ kann man als Regeln $\dfrac{A_1, \ldots, A_k}{A_0}$ interpretieren. Mit $\mathcal{H}_R$ bezeichen wir die Menge der Regeln zu $\mathcal{H}$.

Eine Folge $B_1, \ldots, B_n$ heißt **abgekürzter Beweis** für $\Sigma \vdash A$ in $\mathcal{F}$ mit Annahmen $\mathcal{H}$, wenn $B_1, \ldots, B_n$ ein Beweis für $A$ in $(Ax \cup \Sigma, R \cup \mathcal{H}_R)$ ist.

## Lemma 2.6

1. $\vdash A$ *gilt genau dann, wenn es einen Beweis für* $A$ *gibt.*
2. *Sei* $\mathcal{H}$ *eine Menge von Herleitbarkeitsaussagen der Form* $A_1, \ldots, A_k \vdash A_0$. *Es gibt einen Beweis für* $\Sigma \vdash A$ *genau dann, wenn es einen abgekürzten Beweis für* $\Sigma \vdash A$ *mit Annahmen* $\mathcal{H}$ *gibt.*

## Bemerkung 2.7

- *Eigenschaften der Elemente von* $T(\mathcal{F})$ *werden durch strukturelle Induktion bewiesen.*
- *Die Menge der Beweise*
$$\mathrm{Bew} := \{B_1, \ldots, B_n \in F^+ \mid B_1, \ldots, B_n \textit{ ist Beweis}\}$$
*ist entscheidbar.*
- *Mit der vorherigen Bemerkung ist die Menge* $T(\mathcal{F})$ *der Theoreme rekursiv aufzählbar.*
- *Ist* $\Sigma$ *entscheidbar, dann gelten entsprechende Eigenschaften von Herleitbarkeitsaussagen. Insbesondere ist* $\mathit{Folg}_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ *aufzählbar.*

# Wichtige Eigenschaften zu Herleitbarkeitsaussagen

## Lemma 2.8

- *Gilt $\Sigma \vdash A$, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma_0 \vdash A$.*
  *(Folgt aus der induktiven Definition von $T(\mathcal{F})$)*
  *(Siehe Korollar zum Kompaktheitssatz für $\models$.)*
- *Ist $\Sigma$ inkonsistent, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, die inkonsistent ist.*
- *Ist $\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq F$, dann gilt $Folg_{\mathcal{F}}(\Sigma) \subseteq Folg_{\mathcal{F}}(\Gamma)$.*
- *Gilt $\Sigma \vdash A$ und $\Gamma \vdash B$ für alle $B \in \Sigma$, dann auch $\Gamma \vdash A$.*
  *Ist also $\Sigma \subseteq Folg_{\mathcal{F}}(\Gamma)$, dann gilt $Folg_{\mathcal{F}}(\Sigma) \subseteq Folg_{\mathcal{F}}(\Gamma)$.*
  *(Beweise lassen sich also zusammensetzen.)*
- *Gilt $\Sigma \vdash A$, so ist $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent.*
  *(Gilt auch die Umkehrung?)*
- *Es gilt $T(\mathcal{F}) \subseteq Folg_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ für jede Menge $\Sigma$.*

# Beschreibungen von deduktiven Systemen/Schemata

Die Mengen der Axiome und Regeln deduktiver Systems sind im Allgemeinen nicht endlich.

Um sie endlich zu beschrieben, benutzt man häufig Schemata.

Beispielsweise beschreibt das Formelschema $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ die Menge

$$\{A_0 \rightarrow (B_0 \rightarrow A_0) \;\mid\; A_0, B_0 \in F\}.$$

Das Regelschema $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$ beschreibt die Menge von Regeln

$$\left\{ \frac{A_0, A_0 \rightarrow B_0}{B_0} \;\mid\; A_0, B_0 \in F \right\}.$$

# Das deduktive System $\mathcal{F}_0$

Eingeführt von Stephen Cole Kleene (1909 — 1994).

**Definition 2.9 (Das deduktive System $\mathcal{F}_0$)**

Sei $F_0$ die Formelmenge $F_{\{\neg,\rightarrow\}}$. Das deduktive System $\mathcal{F}_0$ für die Aussagenlogik besteht aus der Axiomenmenge Ax, die durch folgende Axiomenschemata beschrieben ist:

Ax1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Ax3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Die Regelmenge $R$ wird beschrieben durch das Regelschema

$$\text{MP:} \quad \frac{A, (A \rightarrow B)}{B} \quad \text{(modus ponens).}$$

# Bemerkung zum deduktiven System $\mathcal{F}_0$

- Ax1, Ax2 und Ax3 beschreiben disjunkte Formelmengen.
- Ax und $R$ sind entscheidbar.
- Alle Axiome sind Tautologien. Da diese abgeschlossen gegen Modus Ponens sind, sind alle Theoreme Tautologien: $T(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathrm{TAUT}(F_0)$.
- Die Rückwärtsanwendung der Regel ist nicht eindeutig:
  $\dfrac{A, A \to B}{B}$ und $\dfrac{A', A' \to B}{B}$ haben unterschiedliche Annahmen.
  Das erschwert das Finden von Beweisen.
- Es genügt, nur Axiome für Formeln in $\to$ und $\neg$ zu betrachten. Andere Formeln sind zu einer solchen Formel logisch äquivalent.

  Will man allerdings Beweise für die Formeln in $F$ führen, braucht man weitere Axiome, zum Beispiel:

$$\mathrm{Ax1}\wedge : (A \wedge B) \to \neg(A \to \neg B) \qquad \mathrm{Ax2}\wedge : \neg(A \to \neg B) \to (A \wedge B)$$

# Beispiel

## Beispiel 2.10

Für jedes $A \in F_0$ gilt $\vdash (A \to A)$, also $(A \to A) \in T(\mathcal{F}_0)$

## Beweis:

$$
\begin{array}{lll}
B_0 \equiv & (A \to ((A \to A) \to A)) \to & \\
 & \quad ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) & \text{Ax2} \\
B_1 \equiv & A \to ((A \to A) \to A) & \text{Ax1} \\
B_2 \equiv & (A \to (A \to A)) \to (A \to A) & \text{MP}(B_0, B_1) \\
B_3 \equiv & A \to (A \to A) & \text{Ax1} \\
B_4 \equiv & A \to A & \text{MP}(B_2, B_3)
\end{array}
$$

■

# Deduktionstheorem

Wie findet man Beweise im System $\mathcal{F}_0$?

Einziger Hinweis: Sofern Zielformel $B$ kein Axiom ist, muss sie in der Form $(A_1 \to \ldots (A_n \to B) \ldots)$ vorkommen. Wähle geeignete $A_i$.

**Hilfreich:**

**Satz 2.11 (Deduktionstheorem (syntaktische Version))**

*Seien $\Sigma \subseteq F_0$ und $A, B \in F_0$. Dann gilt*

$$\Sigma, A \vdash B \quad \textit{gdw.} \quad \Sigma \vdash (A \to B).$$

# Anwendungen des Deduktionstheorems

## Beispiel 2.12

Um $\vdash \neg\neg A \to A$ zu zeigen, genügt es, $\neg\neg A \vdash A$ zu zeigen.

## Beweis:

| | |
|---|---|
| $B_1 \equiv \neg\neg A$ | |
| $B_2 \equiv \neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A)$ | Ax1 |
| $B_3 \equiv \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$ | MP |
| $B_4 \equiv (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$ | Ax3 ■ |
| $B_5 \equiv \neg A \to \neg\neg\neg A$ | MP |
| $B_6 \equiv (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$ | Ax3 |
| $B_7 \equiv \neg\neg A \to A$ | MP |
| $B_8 \equiv A$ | MP |

# Anwendungen des Deduktionstheorems (Fort.)

## Lemma 2.13

- *Die folgenden Theoreme gelten in $\mathcal{F}_0$:*

$$
\begin{array}{rll}
\textit{(Transitivität der Implikation)} & \vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) & (1) \\
\textit{(Folgerung aus Inkonsistenz)} & \vdash \neg B \to (B \to A) & (2) \\
\textit{(Doppelnegation)} & \vdash B \to \neg\neg B & (3) \\
\textit{(Kontraposition)} & \vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) & (4) \\
\textit{(Implikation)} & \vdash B \to (\neg C \to \neg(B \to C)) & (5) \\
\textit{(Hilfslemma 1)} & \vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to (A \to \neg Ax)) & (E1) \\
\textit{(Hilfslemma 2)} & \vdash (A \to \neg Ax) \to \neg A & (E2) \\
\textit{(Negation aus Inkonsistenz)} & \vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) & (6) \\
\textit{(Eliminierung von Annahmen)} & \vdash (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A) & (7)
\end{array}
$$

- *Es gilt $\Sigma \vdash A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist.*

# Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$

**Frage:** Lassen sich alle Tautologien als Theoreme in System $\mathcal{F}_0$ herleiten?

**Satz 2.14 (Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$)**

*Sei $A \in F_0$ eine Formel der Aussagenlogik.*

a) Korrektheit: *Gilt $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$, dann auch $\models A$*
*d.h. jedes Theorem in $T(\mathcal{F}_0)$ ist eine Tautologie.*

b) Vollständigkeit: *Gilt $\models A$, dann auch $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$*
*d.h. alle Tautologien lassen sich in $\mathcal{F}_0$ herleiten.*