Kompaktheitssatz und Definitionen für den Beweis

Kompaktheitssatz der Aussagenlogik
$\Sigma \subseteq F$ ist erfüllbar genau dann, wenn jede **endliche** Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

Notation:
Seien $f : D \to W$ eine Funktion und $E \subseteq D$. Dann bezeichnet $f|_E$ die Funktion $g : E \to W$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in E$.

Definitionen:

- Sei $W \subseteq V$ eine Menge aussagenlogischer Variablen; dann nennen wir $\psi : W \to \mathbb{B}$ eine **partielle Belegung**.
- Eine partielle Belegung $\psi : W \to \mathbb{B}$ heißt auf eine Formelmenge Σ **erweiterbar**, wenn es eine (totale) Belegung $\varphi : V \to \mathbb{B}$ mit $\varphi|_W = \psi$ gibt, die Σ erfüllt.

Beweis der Kompaktheitssatzes

$\Rightarrow$: Wenn Σ erfüllbar ist, gibt es eine Belegung ψ, die alle Formeln aus Σ erfüllt. Damit erfüllt ψ auch die Formeln jeder endlichen Teilmenge von Σ. Also sind alle endlichen Teilmengen von Σ erfüllbar.

$\Leftarrow$: Seien $p_1, p_2, \dots$ die Variablen, die in Formeln von Σ vorkommen. Mittels Induktion definieren wir für alle $i \geq 1$ partielle Belegungen $\psi_i : \{p_1, \dots, p_i\} \to \mathbb{B}$ mit $\psi_i|_{\{p_1,\dots,p_{i-1}\}} = \psi_{i-1}$ für $i > 1$:

$$\psi_1(p_1) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{wenn es für jede endl. Teilmenge } \Sigma' \text{ von } \Sigma \text{ eine} \\ & \quad \text{Belegung } \varphi \text{ gibt, die } \Sigma' \text{ erfüllt, mit } \varphi(p_1) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\psi_{i+1}|_{\{p_1,\dots,p_i\}} =_{def} \psi_i$$

$$\psi_{i+1}(p_{i+1}) =_{def} \begin{cases} 1, & \text{wenn es für jede endl. Teilmenge } \Sigma' \text{ von } \Sigma \text{ eine} \\ & \text{Belegung } \varphi \text{ gibt, die } \Sigma' \text{ erfüllt, mit } \varphi(p_{i+1}) = 1 \\ & \text{ und } \varphi|_{\{p_1,\dots,p_i\}} = \psi_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen mittels vollständiger Induktion:

(*) Für alle i ist ψ_i auf jede *endliche* Teilmenge Σ' von Σ erweiterbar.

Induktionsanfang:
Zu zeigen: ψ_1 ist auf jede *endliche* Teilmenge Σ' von Σ erweiterbar.
Sei also ein solches Σ' gegeben.

1. Fall: $\psi_1(p_1) = 1$. Nach Definition von $\psi_1(p_1)$ gibt es eine Belegung φ, die Σ' erfüllt, mit $\varphi|_{\{p_1\}} = \psi_1$. Also ist ψ_1 auf Σ' erweiterbar.

2. Fall: $\psi_1(p_1) = 0$. Nach Def. von $\psi_1(p_1)$ gibt es eine endl. Teilmenge Σ'' von Σ, für die es keine Belegung φ mit $\varphi(p_1) = 1$ gibt, die Σ'' erfüllt. $\Sigma'' \cup \Sigma'$ ist eine endliche Teilmenge von Σ und daher nach Voraussetzung dieser Beweisrichtung des Kompaktheitssatzes erfüllbar. Es gibt also eine Belegung φ_0, die $\Sigma'' \cup \Sigma'$ erfüllt. Da φ_0 Σ'' erfüllt, kann nicht $\varphi_0(p_1) = 1$ gelten. Also gilt $\varphi_0(p_1) = 0$ und somit $\varphi_0|_{\{p_1\}} = \psi_1$. Da φ_0 auch Σ' erfüllt, ist ψ_1 auf Σ' erweiterbar.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

ψ_i ist auf jede *endliche* Teilmenge Σ' von Σ erweiterbar.

Zu zeigen: ψ_{i+1} ist auf jede *endliche* Teilmenge Σ' von Σ erweiterbar.

Sei also ein solches Σ' gegeben.

1. Fall: $\psi_{i+1}(p_{i+1}) = 1$. Nach Definition von $\psi_{i+1}(p_{i+1})$ gibt es eine Belegung φ, die Σ' erfüllt, mit $\varphi(p_{i+1}) = 1$ und $\varphi|_{\{p_1,\ldots,p_i\}} = \psi_i$. Also auch $\varphi|_{\{p_1,\ldots,p_{i+1}\}} = \psi_{i+1}$, und damit ist ψ_{i+1} auf Σ' erweiterbar.

2. Fall: $\psi_{i+1}(p_{i+1}) = 0$. Nach Def. von $\psi_{i+1}(p_{i+1})$ gibt es eine endl. Teilmenge Σ'' von Σ, für die es keine Belegung φ gibt, die Σ'' erfüllt und für die gilt: $\varphi(p_{i+1}) = 1$ und $\varphi|_{\{p_1,\ldots,p_i\}} = \psi_i$.

$\Sigma'' \cup \Sigma'$ ist endlich. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Belegung φ_0, die $\Sigma'' \cup \Sigma'$ erfüllt, mit $\varphi|_{\{p_1,\ldots,p_i\}} = \psi_i$; φ_0 erfüllt also auch Σ'' und Σ'. Da φ_0 Σ'' erfüllt und $\varphi|_{\{p_1,\ldots,p_i\}} = \psi_i$, kann nicht $\varphi_0(p_{i+1}) = 1$ gelten. Also gilt $\varphi_0(p_{i+1}) = 0$ und somit $\varphi_0|_{\{p_1,\ldots,p_{i+1}\}} = \psi_{i+1}$.
Da φ_0 auch Σ' erfüllt, ist ψ_{i+1} auf Σ' erweiterbar.

Definiere $\psi : V \to \mathbb{B},\ \psi(p_i) =_{def} \psi_i(p_i)$ für alle $i \geq 1$.

Offensichtlich gilt $\psi|_{\{p_1,\dots,p_i\}} = \psi_i$.

Wir zeigen, dass ψ alle Formeln von Σ erfüllt.

Sei A in Σ beliebig und k der größte Index, so dass p_k in A vorkommt. Nach (*) ist ψ_k auf $\{A\}$ erweiterbar, d.h. es gibt eine Belegung φ mit $\varphi|_{\{p_1,\dots,p_k\}} = \psi_k$, die $\{A\}$ erfüllt. Da $\varphi|_{\{p_1,\dots,p_k\}} = \psi_k = \psi|_{\{p_1,\dots,p_k\}}$, gilt $1 = \mathcal{B}_\varphi(A) = \mathcal{B}_\psi(A)$. Also erfüllt ψ die Formel A, und da A beliebig gewählt war, erfüllt ψ alle Formeln in Σ.

Folglich ist Σ erfüllbar, q.e.d.