Eigenschaften von $\mathcal{F}_0$

Peter Zeller

9. Mai 2017

Basierend auf den Aufzeichnungen von Prof. Meyer.

1 Deduktionstheorem (Syntaktische Version)

Seien $\Sigma \subseteq F_0$ und $A, B \in F_0$. Dann gilt $\Sigma, A \vdash B$ gdw. $\Sigma \vdash A \to B$.

Beweis:

Richtung $\Leftarrow$

Zu zeigen: Aus $\Sigma \vdash A \to B$ folgt $\Sigma, A \vdash B$.
Sei $B_1, \ldots B_n$ ein Beweis für $\Sigma \vdash A \to B$. Dann ergibt sich ein Beweis für $\Sigma, A \vdash B$ durch Anwenden von Modus-Ponens:

$$\begin{array}{rlr} & \ldots & \\ B_n & \equiv A \to B & \ldots \\ B_{n+1} & \equiv A & \text{Hyp.} \\ B_{n+2} & \equiv B & \text{MP}(B_n, B_{n+1}) \end{array}$$

Richtung $\Rightarrow$

Zu zeigen: Aus $\Sigma, A \vdash B$ folgt $\Sigma \vdash A \to B$.
Sei $B_1, \ldots B_n$ ein Beweis für $\Sigma, A \vdash B$.
Wir zeigen, dass $\Sigma \vdash A \to B_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Der Beweis verwendet Induktion über i.

IA: $i = 0$: Die Aussage ist hier trivial.

IV: Sei $i \in \mathbb{N}$ gegeben. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gelte $\Sigma \vdash A \to B_k$.

IS: Wir zeigen, dass dann auch $\Sigma \vdash A \to B_i$ gilt. Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden, wie B_i im Original-Beweis entstanden ist:

1. $B_i \equiv A$ (als Hypothese)

2. $B_i \in Ax \cup \Sigma$
3. Es gibt $j, k < i$ mit $B_j \equiv B_k \to B_i$
   (B_i entstand durch Anwenden von MP)

Fall 1: $B_i \equiv A$
Dann gilt $\Sigma \vdash A \to A$ mit Beispiel 2.10

Fall 2: $B_i \in Ax \cup \Sigma$
Dann folgt $\Sigma \vdash A \to B_i$ mit:

B_i	$B_i \in Ax$ oder $B_i \in \Sigma$
$B_i \to (A \to B_i)$	Ax1
$A \to B_i$	MP

Fall 3: Es gibt $j, k < i$ mit $B_k \equiv B_j \to B_i$
Dann lässt sich $\Sigma \vdash A \to B_i$ mit folgendem Beweis zeigen:

$\big(A \to (B_j \to B_i)\big) \to \big((A \to B_j) \to (A \to B_i)\big)$	Ax2
$A \to (B_j \to B_i)$	IV für k
$(A \to B_j) \to (A \to B_i)$	MP
$A \to B_j$	IV für j
$A \to B_i$	MP

1.1 Anwendungen des Deduktionstheorems

0) Doppelnegation entfernen: $\vdash \neg\neg A \to A$

nach Deduktionstheorem gdw. $\neg\neg A \vdash A$

$B_1 \equiv \neg\neg A$	Hyp.
$B_2 \equiv \neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A)$	Ax1
$B_3 \equiv \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	MP
$B_4 \equiv (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	Ax3
$B_5 \equiv \neg A \to \neg\neg\neg A$	MP
$B_6 \equiv (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	Ax3
$B_7 \equiv \neg\neg A \to A$	MP
$B_8 \equiv A$	MP

1) Transitivität der Implikation: $\vdash (A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$

Beweis: Siehe Übung

2) Folgerung aus Inkonsistenz: $\vdash \neg B \to (B \to A)$

nach Deduktionstheorem gdw. $\neg B \vdash B \to A$

$B_0 \equiv \neg B \to (\neg A \to \neg B)$	Ax1
$B_1 \equiv \neg B$	Hyp.
$B_2 \equiv \neg A \to \neg B$	MP
$B_3 \equiv (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$	Ax3
$B_4 \equiv B \to A$	MP

3) Doppelnegation einführen: $\vdash B \to \neg\neg B$

Beweis: Siehe Übung

4h) Hilfslemma: $A \to B \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B$

nach Deduktionstheorem gdw. $A \to B, \neg\neg A \vdash \neg\neg B$

$B_0 \equiv \neg\neg A \to A$	Doppelnegation entfernen (0)
$B_1 \equiv \neg\neg A$	Hyp
$B_2 \equiv A$	MP
$B_3 \equiv A \to B$	Hyp
$B_4 \equiv B$	MP
$B_5 \equiv B \to \neg\neg B$	Doppelnegation einführen (3)
$B_6 \equiv \neg\neg B$	MP

4) Kontraposition: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

nach Deduktionstheorem gdw. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$

$B_0 \equiv (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$	Ax3
$B_1 \equiv A \to B$	Hyp
$B_2 \equiv \neg\neg A \to \neg\neg B$	Hilfslemma 4h mit B_1
$B_3 \equiv \neg B \to \neg A$	MP

5h) Hilfslemma: $B \vdash (B \to C) \to C$

nach Deduktionstheorem gdw. $B, B \to C \vdash C$

B	Hyp
$B \to C$	Hyp
C	MP

5) Implikation: $\vdash B \to \big(\neg C \to \neg(B \to C)\big)$

nach Deduktionstheorem gdw. $B \vdash \neg C \to \neg(B \to C)$

$B_0 \equiv \big((B \to C) \to C\big) \to \big(\neg C \to \neg(B \to C)\big)$	Kontraposition (Lemma 4)
$B_1 \equiv B$	Hyp
$B_2 \equiv (B \to C) \to C$	Hilfslemma 5h mit B_1
$B_3 \equiv \neg C \to \neg(B \to C)$	MP(B_0, B_2)

E1) Hilfslemma 1: $\vdash (A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to (A \to C)\big)$

Beweis: Siehe Übung

E2) Hilfslemma 2: $\vdash (A \to \neg Ax) \to \neg A$ **(wobei** Ax **ein Axiom ist)**

nach Deduktionstheorem gdw. $A \to \neg Ax \vdash \neg A$

$B_0 \equiv (A \to \neg Ax) \to (\neg\neg Ax \to \neg A)$	Kontraposition (Lemma 4)
$B_1 \equiv A \to \neg Ax$	Hyp.
$B_2 \equiv \neg\neg Ax \to \neg A$	MP
$B_3 \equiv Ax \to \neg\neg Ax$	Doppelnegation einführen (Lemma 3)
$B_4 \equiv Ax$	Axiom
$B_5 \equiv \neg\neg Ax$	MP
$B_6 \equiv \neg A$	MP

6) Negation aus Inkonsistenz: $\vdash (A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to \neg A\big)$

nach Deduktionstheorem gdw. $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$

$B_0 \equiv (A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to (A \to \neg Ax)\big)$	Hilfslemma E1
$B_1 \equiv A \to B$	Hyp
$B_2 \equiv (A \to \neg B) \to (A \to \neg Ax)$	MP
$B_3 \equiv A \to \neg B$	Hyp.
$B_4 \equiv A \to \neg Ax$	MP
$B_5 \equiv (A \to \neg Ax) \to \neg A$	Hilfslemma E2
$B_6 \equiv \neg A$	MP

7) Eliminierung von Annahmen: $\vdash (B \to A) \to \big((\neg B \to A) \to A\big)$

nach Deduktionstheorem gwd. $B \to A, \neg B \to A \vdash A$
Außerdem folgt mit Deduktionstheorem:
Aus Lemma 0: $\neg\neg A \to A$ (0')
Aus Lemma 4: $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ (4')
Aus Lemma 6: $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$ (6')

$B_0 \equiv B \to A$	Hyp.
$B_1 \equiv \neg A \to \neg B$	Lemma 4' mit B_0
$B_2 \equiv \neg B \to A$	Hyp.
$B_3 \equiv \neg A \to \neg\neg B$	Lemma 4' mit B_2
$B_4 \equiv \neg\neg A$	Lemma 6' mit B_1 und B_3
$B_5 \equiv A$	Lemma 0' mit B_4

2 Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$

Lemma 2.15

Seien $A \in F_0$ mit Variablen aus $p_1, \dots, p_n$. Sei ψ eine Belegung. Mit

$$P_i := \begin{cases} p_i, & \text{falls } \mathcal{B}_\psi(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \text{falls } \mathcal{B}_\psi(p_i) = 0 \end{cases} \qquad A' := \begin{cases} A, & \text{falls } \mathcal{B}_\psi(A) = 1 \\ \neg A, & \text{falls } \mathcal{B}_\psi(A) = 0 \end{cases}$$

gilt $P_1, \dots, P_n \vdash A'$.
Wir können also im Prinzip in $\mathcal{F}_0$ zeigen, dass eine Belegung eine Formel erfüllt bzw. nicht erfüllt.

Beispiel:

Sei ψ eine Belegung mit $\psi(p_1) = 1$ und $\psi(p_2) = 0$.
Dann ist $\mathcal{B}_\psi\Big(\neg\big(p_1 \to \neg(p_1 \to p_2)\big)\Big) = 0$.
Also gilt laut Lemma: $p_1, \neg p_2 \vdash \neg\neg\big(p_1 \to \neg(p_1 \to p_2)\big)$

Beweis:

Per Induktion über die Struktur von A.

IA: Sei $A \equiv p_i$

Fall 1: $\mathcal{B}_\psi(p_i) = 1$
Dann gilt $\mathcal{B}_\psi(A) = 1$ und somit $A' \equiv A \equiv p_i$
Es ist also zu zeigen $P_1, \ldots, P_n \vdash p_i$ mit $P_i \equiv p_i$, was trivial ist.

Fall 2: $\mathcal{B}_\psi(p_i) = 0$
Dann gilt $\mathcal{B}_\psi(A) = 0$ und somit $A' \equiv \neg A \equiv \neg p_i$
Es ist also zu zeigen $P_1, \ldots, P_n \vdash \neg p_i$ mit $P_i \equiv \neg p_i$, was trivial ist.

IV: Seien $B, C \in F_0$ mit Variablen aus $p_1, \ldots, p_n$ mit $P_1, \ldots, P_n \vdash B'$ und $P_1, \ldots, P_n \vdash C'$ (B' und C' analog zur Definition von A' oben).

IS:

Fall $A \equiv \neg B$**:**

Fall $\mathcal{B}_\psi(A) = 1$
Dann ist $A' \equiv A$ und $\mathcal{B}_\psi(B) = 0$ und somit $B' \equiv \neg B$.
Nach IV gilt $P_1, \ldots, P_n \vdash B'$.
Da $B' \equiv A'$ also auch $P_1, \ldots, P_n \vdash B'$.

Fall $\mathcal{B}_\psi(A) = 0$
Dann ist $A' \equiv \neg A \equiv \neg\neg B$ und $\mathcal{B}_\psi(B) = 1$ und somit $B' \equiv B$.
Nach IV gilt $P_1, \ldots, P_n \vdash B'$ also $P_1, \ldots, P_n \vdash B$.
Mit Lemma 3 (Doppelnegation einführen) und Modus-Ponens folgt dann $P_1, \ldots, P_n \vdash \neg\neg B$ also $P_1, \ldots, P_n \vdash A'$.

Fall $A \equiv B \to C$**:**

Fall $\mathcal{B}_\psi(A) = 1$
Dann gilt $\mathcal{B}_\psi(B) = 0$ oder $\mathcal{B}_\psi(C) = 1$.
Außerdem ist $A' \equiv A \equiv B \to C$.

Fall $\mathcal{B}_\psi(B) = 0$
Dann ist $B' \equiv \neg B$ und nach IV gilt $P_1, \ldots, P_n \vdash \neg B$.
Mit Lemma 2 (Folgerung aus Inkonsistenz) kann dann $A \equiv B \to C$ bewiesen werden:

$\neg B$	nach IV
$\neg B \to (B \to C)$	Lemma 2
$B \to C$	MP

Fall $\mathcal{B}_\psi(C) = 1$
Dann ist $C' \equiv C$ und nach IV gilt $P_1, \dots, P_n \vdash C$.
Es gilt also auch $P_1, \dots, P_n, B \vdash C$ und mit Deduktionstheorem $P_1, \dots, P_n \vdash B \to C$, also $P_1, \dots, P_n \vdash B \to A$.

Fall $\mathcal{B}_\psi(A) = 0$
Dann gilt $\mathcal{B}_\psi(B) = 1$ und $\mathcal{B}_\psi(C) = 0$.
Es sind also $A' \equiv \neg A \equiv \neg(B \to C)$, $B' \equiv B$ und $C' \equiv \neg C$.
Nach IV gilt $P_1, \dots, P_n \vdash B$ und $P_1, \dots, P_n \vdash \neg C$.
Daraus ergibt sich mit Lemma 5 (Implikation) der Beweis für $P_1, \dots, P_n \vdash B \to A' \equiv \neg(B \to C)$:

B	Nach IV
$\neg C$	Nach IV
$B \to \big(\neg C \to \neg(B \to C)\big)$	Lemma 5
$\neg C \to \neg(B \to C)$	MP
$\neg(B \to C)$	MP

Satz 2.14: Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$

Gilt $\models A$, dann auch $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$.

Beweis:

Sei $A \in F_0$ eine Tautologie mit Variablen $p_1, \dots, p_n$.
Wir zeigen mit Induktion nach i: Für alle $i \in \mathbb{N}$, alle $P_1, \dots, P_{n-i}$ gilt:
Wenn für alle P_j gilt, dass $P_j \equiv p_j$ oder $P_j = \neg p_j$, dann:
$P_1, \dots, P_{n-i} \vdash A$
Insbesondere gilt für $i > n$: $\vdash A$

IA: $i = 0$

Seien $P_1, \dots, P_n$ gegeben.
Wähle Belegung ψ mit $\psi(p_i) = 1$ wenn $P_i = p_i$ und $\psi(p_i) = 0$ sonst.
Da A Tautologie ist, gilt $\mathcal{B}_\psi(A) = 1$.
Nach Lemma 2.15 gilt also $P_1, \dots, P_n \vdash A$.

IV: Für $i \in \mathbb{N}$ gelte:

Für alle $P_1, \dots, P_{n-i}$ mit jeweils $P_i \equiv p_i$ oder $P_i = \neg p_i$ gilt: $P_1, \dots, P_{n-i} \vdash A$

IV: Seien $P_1, \dots, P_{n-(i+1)}$ gegeben. Zu zeigen: $P_1, \dots, P_{n-(i+1)} \vdash A$

Nach IV gelten:
$P_1, \ldots, P_{n-(i+1)}, p_{n-i} \vdash A$
$P_1, \ldots, P_{n-(i+1)}, \neg p_{n-i} \vdash A$

Mit dem Deduktionstheorem erhält man:
$P_1, \ldots, P_{n-(i+1)} \vdash p_{n-i} \rightarrow A$
$P_1, \ldots, P_{n-(i+1)} \vdash \neg p_{n-i} \rightarrow A$

Wir zeigen dann $P_1, \ldots, P_{n-(i+1)} \vdash A$ mit dem folgenden Beweis:

$p_{n-i} \rightarrow A$	
$\neg p_{n-i} \rightarrow A$	
$(p_{n-i} \rightarrow A) \rightarrow \big((\neg p_{n-i} \rightarrow A) \rightarrow A\big)$	Eliminierung von Annahmen (Lemma 7)
$(\neg p_{n-i} \rightarrow A) \rightarrow A$	MP
A	MP